周易的数学原理

欧阳维诚著

湖北教育出版社

内 容 简 介

作者以现代数学为工具研讨周易，方法新颖、观点大胆，为周易研究另辟了一条蹊径. 作者提出“易卦是古人研究思维决策的数学模型”、“卦、爻辞是解释决策模型的例题”等重要假说. 作者还对易卦的起源、易卦的卦序、大衍之数等历来议论纷纭、莫衷一是的重要问题，用数学的观点重新进行研究，提出了新的观点、结论和证据. 作者还对前人及今人在易学研究中的不足作了评论.

本书分 8 章. 第一章绪论，粗略论述周易中的数学内容. 第二章至第七章分别论述周易与集合论、布尔代数、群论、整数论、组合论、概率论等的联系. 第八章是数学原理在易学研究中的应用.

序

在科学研究中，结论固然重要，但有时候，方法或更甚焉．在易学研究史上，每一个重大的进展无不伴随着研究方法的突破．汉儒的象数学，王弼的得意说等等，莫不得力于研究方法的创新．数学方法对社会科学研究的渗透，推动了社会科学研究的现代化，也有可能促进易学研究的现代化．作者不揣浅陋，在这本小书中试图探讨如何将现代数学工具引进易学研究中．作者在拙著《周易新解》一书中，曾经用数学方法考察易卦，提出了“易卦是一个6维布尔向量”、“易卦是古人研究思维决策的数学模型”、“卦、爻辞是解释决策模型的例题”的假说，并力图根据这一假说对《易经》卦爻辞进行新的诠释．本书则是作者的进一步尝试，试图利用数学方法对易学研究中某些悬而未决的难题，如通行本的“卦序”问题、“大衍之数”问题等等进行探讨．

无庸讳言，在《周易》的《经》、《传》中不太可能包含现代科学技术的内容或预见，把《周易》无限地神秘化的做法本身就是不科学的．不过，也必须看到，易学与数学是确有极为密切的联系的．第一，作为一种抽象的符号系统，易64卦所成之集是一个良好的代数结构，有着丰富的数学内容．例如，易卦集是一个格、一个布尔代数、一个交换群、一个古典概型的样本空间，等等．易学中的某些概念，如果只涉及卦画的结构，就可以进行严格的数学

描述.从而,这些概念的所有的逻辑的结论,都必然在相应的数学描述中得到平行的反映;第二,各种揲蓍成卦的方法蕴含着数学的内容和技巧,不同的筮法涉及组合论、数论、概率论中某些深刻的定理;第三,历代学者特别是某些现代科学易学家曾经将许多数学问题"援易以为说",在"易学愈繁"的同时,不少数学内容事实上已被"援以入易".由此可见,在易学研究中引进数学方法,不仅是必要的,而且是可能的.易卦集所包含的丰富数学内容,为在易学研究中引进数学方法提供了坚实而广泛的基础.

本书既是探讨如何利用现代数学工具去研究易学问题,因此,写作的重点在于研究方法的建立,而不是易学或者数学知识的罗列;着眼于易学与数学之间的有机的深层的联系,而不是将《周易》与现代数学作牵强附会的比附.全书内容共分八章:第一章绪论,粗略地回顾了历代易学研究中涉及的数学内容.第二章至第七章是《周易》的数学原理,它包括《周易》与集合论、布尔代数、群论、整数论、组合论、概率论等的关系.为了便于不熟悉数学的读者阅读和理解,所有数学概念的引入,都是通过易学中的有关概念来解释的.第八章讲的是《周易》的数学原理在易学研究中的应用.在这一章中,对易学研究中某些令人感兴趣的,至今仍然悬而未决的难题,作了一些新的探讨.

作者衷心感谢湖北教育出版社在她的选题计划中给了本书以一席之地.责任编辑黄邦本先生认真地审读了本书的初稿,写了长达数千字的审读意见,对本书初稿提出了许多中肯的批评和有价值的建议,给了作者以很大的启发.根据黄先生的意见,作者对初稿作了相应的修改.对于黄先生为本书所付出的辛勤劳动,作者谨向他表示由衷的敬意和谢意.

易学不易,数学亦难.把现代数学方法引进易学研究,对于易学肤浅、数学荒疏的作者来说,实在是一种力难胜任的尝试.

既难免离经叛道之嫌，更恐贻画虎类狗之讥．但是，我仍然希望，这本小书的问世．能够给《周易》的爱好者，特别是那些具有一定的数学基础而又喜欢《周易》的读者以一些方法论的启示．我更希望，书中的错误和不妥之处，能得到方家的指正．

欧阳维诚

1992年11月22日深夜

目　录

第一章　绪论
§1.1　历代易学家的数学研究综述 …… 2
§1.2　研究《周易》的数学原理的必要性 …… 28
第二章　周易与集合论
§2.1　集合的概念及其运算 …… 33
§2.2　二元关系 …… 40
§2.3　函数与映射 …… 44
§2.4　等价关系与序关系 …… 51
第三章　周易与布尔代数
§3.1　二元运算 …… 62
§3.2　布尔代数 …… 72
§3.3　布尔向量 …… 77
第四章　周易与群论
§4.1　群与子群 …… 86
§4.2　易卦群的性质 …… 94
§4.3　陪集与划分 …… 100
第五章　周易与数论
§5.1　同余的基本知识 …… 108
§5.2　揲蓍的数学原理 …… 117
第六章　周易与组合论

§6.1 排列与组合 …… 125
§6.2 图的基本概念 …… 132
§6.3 整数的分拆 …… 135
第七章 周易与概率论
§7.1 随机事件与概率 …… 142
§7.2 概率的运算 …… 150
§7.3 数学期望 …… 164
第八章 数学在易学研究中的应用
§8.1 论易卦的起源 …… 168
§8.2 论《周易》的卦序排列 …… 184
§8.3 论大衍之数与筮法 …… 203
§8.4 论象数易与科学易 …… 238

参考文献 …… 253

第一章 绪 论

神无方而易无体.

——《周易·系辞》

在历代易学研究中,《周易》都与数学有着不解之缘.按照传统易学的观点,易学研究的主要内容是象、数、理、占.其中的象立足于卦画,卦画是一套抽象的符号系统,它表示什么意义?"仁者见之谓之仁,智者见之谓之智",人们可以赋予它们各种各样的内容,但最容易的是被视为数学的符号.其中的数(包括天地数、河图数、筮数等),虽然比较简单,但经过人们长期的推演附会,也与数学发生了密切的、多样的联系.至于占,则因为要通过揲蓍而成卦,"三变得一爻"、"十有八变而成卦".成卦的过程,涉及到概率论中的贝努里试验与数论中的同余式,与现代数学的关系已经十分密切.因此,易学研究与数学有这样或那样的关系,也就丝毫不足为怪了.《四库全书·总目提要》指出:"易道广大,无所不包,旁及天文、地理、乐律、兵法、韻学、算术、以逮方外之炉火,皆可援《易》以为说,而好异者又援以入《易》,故易学愈繁".数学与易学的关系也正是如此.卦画作为一种抽象的符号,完全可以作为数学研究或运算的对象.不少现代数学的概念,确实可以"援《易》以为说".更多的数学概念便被"好异者援以入

《易》”，使易学中的数学内容也愈演愈繁了.

本书的目的，一方面是研究、发掘《周易》中蕴含的数学内容，并运用所指出的数学原理对易学研究中一些悬而未决的问题进行新的探讨；另一方面，也对历代易学研究中涉及的种种《周易》与数学的问题，作一些去粗取精，正本清源的工作，使易学与数学之间建立起真正的、有机的联系，而不是肤浅的、标签式的牵强附会. 康德(I. Kant，1724～1804)曾经说过：“任何一门自然科学，只有当它数学化之后，才能称得上是一门真正的科学.”①这虽是针对自然科学而说的，但是，对于易学这门特殊的学问，也是有一定的现实意义的.

§1.1 历代易学家的数学研究综述

古今中外不少易学研究的著作都涉及到数学，特别是近年来“科学易”的兴起，更多的数学概念被引进到《周易》中来，致使有人不无感慨地说：“现在开易学会几乎成了百科全书会，相互之间听不懂所讲的内容.”②可见，在当代易学研究中引进的数学概念，已经达到了相当的广度和深度.

纵观过去易学中的数学研究，总的说来，大抵可分为以下几种类型(为了说话的方便，笔者杜撰了几个名词).

(一)数理哲学派

这一类研究方法肇源于以“天人合德”为基础的中国古代数理哲学.《系辞》说：“易有太极，是生两仪，两仪生四象，四象生八卦，八卦定吉凶，吉凶生大业.”又说：“大衍之数五十，其用四十

① 转引自丁石孙、张祖贵：《数学与教育》，p. 66，湖南教育出版社 1989 年版.

② 刘正：当代易学研究的困境，《哲学研究》，1989 年第 10 期，p. 33.

有九…天一地二，天三地四，天五地六，天七地八，天九地十．天数五，地数五，五位相得而各有合．天数二十有五，地数三十，凡天地之数，五十有五，此所以成变化而行鬼神也．”

数学的符号与某些数字，常常使人产生神秘的观点．古希腊罗马时代的神数观念，毕达哥拉斯学派的万物皆数的观念，都是典型的例子．德国哲学家卡西尔(E. Cassirer，1874～1945)写道：“像语言和艺术的符号一样，数学的符号从一开始就被某种巫术的气氛所环绕，人们带着宗教的畏惧和崇拜来看待它们，以后，这种宗教的神秘信仰慢慢地发展为一种形而上学的信仰”．①古代西方认为数是上帝的创造，中国没有上帝的观念，中国古代文化一个最显著的特点是“天人合德”的宇宙本体哲学，所有中国古代文化的创造活动都发源于并得力于此种哲学，此种哲学在《易传》中已经有了明确的表现．我国古代对符号与数产生的神秘感，虽不会归结为上帝的创造，但会认为这些符号和数是那些能通神明之德的圣人所发现的某种宇宙法则的体现．《系辞》说：“古者包牺氏之王天下也，仰则观象于天，俯则观法于地，观鸟兽之文，与地之宜，近取诸身，远取诸物，于是始作八卦，以通神明之德，以类万物之情．”这表明了古人认为无论是精神文化还是物质文化均取诸天地的法象，神奇的《周易》中的一些数字更不能例外，它们具有“成变化而行鬼神”的功能，有“范围天地之化而不过，曲成万物而不遗”的作用．研究推演它们之间的关系就有可能发现天人之间的奥秘．

以“大衍之数”为例．“大衍之数”为什么是50？实际上为什么又只用49呢？历代易学家对它作了种种解释(详见第八章§3)．宋朝著名理学家朱熹(1130～1200)尤为突出．他写道：“大

① 卡西尔著，甘阳译：《人论》，p. 275，上海译文出版社1986年版．

衍之数五十，盖以河图中宫，天五乘地十而得之，至用以筮，则又止用四十九，盖出于理势之自然，而非人之知力所能损益也."①一方面，他认为人的智力很难理解"大衍之数"为什么是50？另一方面，他又力图通过数学运算，探求论证"大衍之数"的来源.

探求"大衍之数"的来源有两条重要线索：

一是《河图》、《洛书》.《系辞》说："河出图，洛出书，圣人则之."明确地提出演《周易》的圣人，效法了《河图》、《洛书》.所以，朱熹认为："大衍之数五十"是以河图中宫的天五乘地十而得来的.他认为《河图》、《洛书》是数之源.他写道：

"自《洛书》以三三积数，为数之原.而自四以下，皆以为法焉.何则？三者天数也，故其象圆.四者地数也，故其象方.自五五以下，皆以三三图为根.自六六以下，皆以四四图为根，而四四图又实以三三图为根，故《洛书》为数之原，不易之论也."②

这里涉及到了高阶幻方的研究.朱熹还认为：将《河图》、《洛书》合起来的整体称为"未分"，就是"易有太极"的"太极"；分开之后，将是"分而为二以象两"的"两仪".他设计了一个《河图未分未变方图》，以进一步说明《河图》、《洛书》是数理之原.

"《河图》之数，五十有五.《洛书》之数，四十有五，合为一百.此天地之全数也.以一百之全数为斜界而中分之，则自一至十者，积数五十有五.自一至九者，积数四十有五.二者相交而成

① 朱熹：《周易本义》，引自《易学精华》，p. 1075，齐鲁书社，1990年影印版.

② 《易学启蒙》，转引自张国梁：《周易原理与古代科技》，p. 215，鹭江出版社，1990年版.

《河》、《洛》数之两三角形矣."①

另一条线索是《周髀算经》.其中有言:

"数之法出于圆方,圆出于方,方出于矩,矩出于九九八十一.故折矩以为勾广三,股修四,径隅五,既方之外,半其一矩,环而共盘,得成三四五.两矩共长二十有五,是谓积矩.故禹之所以治天下者,此数之所以生也."②

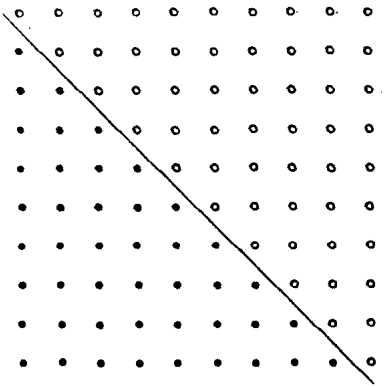


图 1.1.1 河洛未分未变方图

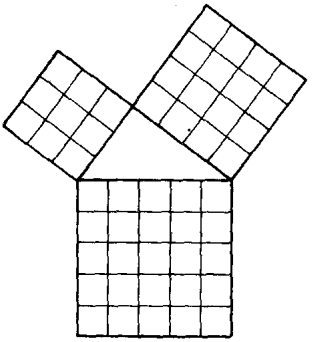
这里说,数出于圆、方,而《周髀算经》中又说:"方属地,圆属天,天圆地方."也就是说,天地数出于圆方,圆方出于勾股."大衍之数"既与天地数有关,自然也与勾股相联系.所以朱熹又作《大衍勾股之原图》与《大衍圆方之原图》(图 1.1.2).在《大衍勾股之原》图中,小方格数相加恰为 50.《大衍圆方之原》图是一个

① 《易学启蒙》,转引自张国梁:《周易原理与古代科技》,p.216,鹭江出版社 1990 年版.

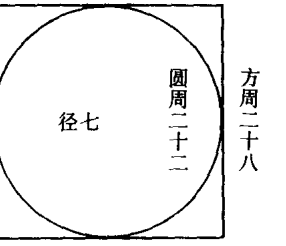
② 《周髀算经》,p.4,上海古籍出版社 1990 年影印版.

直径为 7 的圆周内切于一个边长为 7 的正方形，方形与圆形的周长之和恰为 50. 所以说："大衍之数五十."50 开平方未能得整数，减去 1 后，余数 49 恰为整数的平方，故"其用四十有九". 这就是朱熹的解释. 他写道：

"论方圆周围之合数则五十，…此大衍之体也. …蓍策之数，盖以七为用者，盖方圆之形，惟以径七为率，则能得到周围之整数."①



《大衍勾股之原》图



《大衍圆方之原》图

图 1.1.2

《大衍勾股之原》图与《大衍圆方之原》图已经用到了较多的数学知识. 两图的数学思想显然来自汉赵爽对《周髀算经》的注解：

"圆径一而周三，方径一而匝四，伸圆之周而为勾，展方之匝而为股，共结一角，邪适弦五. 攷圆方斜径相通之率."

但朱熹没有再采用"周三径一"的旧说，而采用了祖冲之的

① 《易学启蒙》，转引自张国梁：《周易原理与古代科技》，p. 218，鹭江出版社 1990 年版.

疏率 $\pi=22/7$.

综上所述，数理哲学派是为了哲学命题的需要，在形而上学的假定之下，与某些数学命题作了牵强附会的联系，并没有真正揭露出易卦丰富的数学内涵；但他们的工作对我国古代数学的发展，还是起了一定的作用的.

值得注意的是，今天仍有一些易学研究者，相信《周易》中蕴藏了"成变化而行鬼神"的数学公式，他们力图找到这种公式. 例如，有人最近在杂志上发表文章，提出了所谓的《周易》预测公式，自称其公式不仅灵验，而且是完全"符合代数学的原理与规律的."[①]文章写道：

"1991 年 3 月 13 日晚 8 时为人占一朋友的身高，得"泽风大过卦"，一爻变，其本、之、互卦的卦数及时序数如下：

本卦(䷛，䷟)	之卦(䷛)	互卦(䷛)
2+5=7	2+1=3	1+1=2
四二九	四二九	一四九
五三八	一四九	一四九

运算：第一步，将本卦体卦的时序数逐个相加

4+2+9=15(分米)=150(厘米)

第二步，三卦的卦数相加

7+3+2=12(厘米)

第三步，将以上两项得数相加

150+12=162(厘米)

时因问者立着，当半迟半速，用

$$B=A(1\pm\frac{1}{40})$$

① 蓝允恭等：八卦的数在预测中的运用，《智力开发》，1992 年第 1 期.

的公式得

$$1.62\times(1\pm\frac{1}{40})=1.62(\text{米})\pm4.5\text{厘米}$$

取＋号得 1.67(米).后证实其人身高果为 1.67 米.”

文章描写得非常详细具体,灵验得很.是否真有其事姑且放开不论,而该文作者自称“符合代数学的运算原理”,则令人决不敢苟同.这套所谓的预测方法与数学研究风马牛不相及.我们要说的只是:“善为易者不占!”

(二)易数源流派

中国古代数学曾经取得过光辉的成就,但是却一直得不到社会的重视.在中国古代典籍中,强调数学的重要性的虽也不乏其例,如宋朝著名数学家秦九韶(1202～1261)认为数学“大则可以通神明,顺性命;小则可以经世务,类万物.”①但这种观点,没有任何社会文化基础,不仅没有被社会所接受,就连数学家本人也都认为数学只能“经世务,类万物”,最多是一种不能登大雅之堂的济世之术.

封建王朝的制度也明确地反映了这一点.唐朝的最高学府——国子监虽然设有明算科,把数学作为一个专业,但算学博士的官秩才是“从九品下”,算学助教则没有品级.而国子监的经学博士官秩为正五品上,连助教也是从六品上.②两者的地位相差极为悬殊,因此出现了“士族所趋唯明经、进士二科而已”的局面.总之,在漫长的封建社会中,数学作为一种不能登大雅之堂的术,一直处于十分低下的地位.

中国古代许多优秀的数学家,为了提高数学的地位,使它能

① 转引自吴文俊主编:《秦九韶与〈数书九章〉》,扉页书影,北京师范大学出版社,1987 年版.

② 《旧唐书》卷 44,职官志.

和经学一样，得到社会的同等对待，不得不把自己的优秀数学成果，附会成经学的内容. 在重要的儒家经典中，除了《周易》之外，都难以附会出数学的命题，而抽象的易卦符号系统，正是附会数学内容的绝好工具. 所以，不少优秀的古代数学家都曾以自己的优秀成果附会为《周易》的固有内容. 例如，秦九韶将他的一次同余式组解法称为《大衍求一术》；唐朝僧一行(683～727)的“大衍历议”都是典型的例子. 在这种风气的影响下，不少数学命题，都被“援易以为说”.

以秦九韶的“大衍求一术”为例. 秦氏所著《数书九章》在数学内容上颇多创新，能道前人之所未道. 但秦氏却把书中 81 个问题的第一个命名为“蓍卦发微”. 并在序言中宣称：“昆仑旁礴，道本虚一，圣有大衍，微寓于易. 奇余取策，群数皆捐，衍而究之，探隐知原. …其书九章，唯兹弗纪.”①明确肯定“大衍求一术”来源于《周易》.

实际上，秦九韶的“大衍求一术”与传统易学所讲的筮法相去很远，看不出它们之间有什么逻辑的承袭关系. 试将其作一简单的比较：

关于占筮的具体方法，最早的也是最权威的记载见于《系辞》：“大衍之数五十，其用四十有九，分而为二以象两，挂一以象三，揲之以四以象四时，归奇于扐以象闰，五岁再闰，故再扐而后挂…是故四营而成《易》，十有八变而成卦. …”这是一套严格的程序. 对此，传统易学的一般解释如下：

(1)取 50 根蓍草，去其 1，实际只有 49 根：

$$R=50-1=49$$

① 转引自吴文俊主编：《秦九韶与〈数书九章〉》. p. 89，北京师范大学出版社，1987 年版.

(2)将 R 任意分为两部分：

$$R=R_1+R_2$$

(3)在 R_1 或 R_2 的任一份(不妨设为 R_1)中去其 1：

$$(R_1-1)+R_2=48$$

(4)将两份蓍草每 4 根一次数出，余数分别为 $r_1,r_2(1\leqslant r_1,r_2\leqslant 4)$：

$$(R_1-1)\equiv r_1(\mathrm{mod}4),\ R_2\equiv r_2(\mathrm{mod}4),1\leqslant r_1,r_2\leqslant 4$$

(5)去掉两份中的余数 r_1,r_2 以及(3)中拿走的 1 根，共去掉

$$r_1+r_2+1=5\text{ 或 }9$$

(6)剩下的蓍草数必为 44 或 40：

$$R-(r_1+r_2+1)=44\text{ 或 }40$$

这叫做“一变”.将第一变后剩下的蓍草数重复(1)～(6)的过程：

(A)	(B)
$44=R_1+R_2$	$40=R_1+R_2$
$(R_1-1)+R_2=43$	$(R_1-1)+R_2=39$
$R_1-1\equiv r_1,R_2\equiv r_2(\mathrm{mod}4)$	$R_1-1\equiv r_1,R_2\equiv r_2(\mathrm{mod}4)$
$r_1+r_2+1=4\text{ 或 }8$	$r_1+r_2+1=4\text{ 或 }8$
$44-(r_1+r_2+1)=40\text{ 或 }36$	$40-(r_1+r_2+1)=36\text{ 或 }32$

这叫做“二变”,将第二变后剩下的蓍草数重复(1)～(6)的过程：

(C)	(D)	(E)
$40=R_1+R_2$	$36=R_1+R_2$	$32=R_1+R_2$
$(R_1-1)+R_2=39$	$(R_1-1)+R_2=35$	$(R_1-1)+R_2=31$
$R_1-1\equiv r_1$	$R_1-1\equiv r_1$	$R_1-1\equiv r_1$
$R_2\equiv r_2(\mathrm{mod}4)$	$R_2\equiv r_2(\mathrm{mod}4)$	$R_2\equiv r_2(\mathrm{mod}4)$

$r_1+r_2+1=4$ 或 8	$r_1+r_2+1=4$ 或 8	$r_1+r_2+1=4$ 或 8
$40-(r_1+r_2+1)$	$40-(r_1+r_2+1)$	$28-(r_1+r_2+1)$
$=36$ 或 32	$=32$ 或 28	$=28$ 或 24

这是“三变”.“三变”之后剩下的蓍草数为 36,32,28 或 24,它们都是 4 的倍数,分别以 4 除之,其商为整数(称为筮数):

$36\div4=9$,称为老阳,得到阳爻但可变;

$32\div4=8$,称为少阴,得到阴爻;

$28\div4=7$,称为少阳,得到阳爻;

$24\div4=6$,称为老阴,得到阴爻但可变.

可见,商数为奇数的(7 或 9)便得到阳爻,商数为偶数(8 或 6)的便得到阴爻.这就叫做“三变得一爻”.因为最后所得筮数共有 4 个,故称为“四营”.一个卦共有 6 爻,每得一爻要经过“三变”,6 爻成卦需经 18 变,故曰“十有八变而成卦.”

秦九韶所用的方法与上述方法大相径庭.他在“筮卦发微”中对筮法的解释是:

“凡揲蓍求一爻之数,欲得一、二、三、四.出于无为,必令揲者不得知.故以四十九蓍,分之为二.只用左手之数,假令分得三十三,自一一揲之,必奇一,故不繁揲,乃径挂一.故《易》曰:‘分而为二以象两,挂一以象三.’次后,又令筮人以二二揲之,其三十三,亦奇一,故归奇于扐.又令以三三揲之,其三十三,必奇三,故又归奇于扐.又令以四四揲之,又奇一,亦归奇于扐.与前挂一,并三度揲,通有四扐,乃得一、一、三、一.其挂一者,乘‘用数图’左上用数一十二;其二揲扐一者,乘左副用数二十四;其三揲扐三者,乘左次用数四,得一十二;其揲四扐一者,乘左下用数九.挂一,得一十二;扐一,得二十四;扐三,得一十二;又扐一,得九,并为总数.并此四总得五十七.不问所握几何,乃满衍母一十

二去之，得不满者九（原注：或是知其所握三十三，亦满衍母去之，亦只数九数）以为实. 用三才衍法约之，得三. 乃画少阳单爻（原注：或不满得八，得七为实，皆命为三）. 他皆仿此. 术意：谓揲二、揲三、揲四者，凡三度，复以三十三从头数揲之，故曰'三变而成爻'；既卦有六爻，必一十八变，故曰'十有八变而成卦'."①

这段话的主要含义是：凡要通过揲蓍以求得一个爻的筮数，就要先得一、二、三、四 4 个数. 将 49 根蓍草分为两部分，只取左手分得的 $N(N<49)$ 根蓍草. 将 N 根草一根一根地数，最后肯定余 1，因此可免去麻烦的实际操作. 再对 N 根草二根二根地数，余 $r_2(1\leqslant r_2\leqslant 2)$ 根；三根三根地数，余 $r_3(1\leqslant r_3\leqslant 3)$ 根；四根四根的数，余 $r_4(1\leqslant r_4\leqslant 4)$ 根. 这样，就得到一个一次同余式组：

$$N\equiv 1(\mathrm{mod}1)$$
$$N\equiv r_2(\mathrm{mod}2)$$
$$N\equiv r_3(\mathrm{mod}3)$$
$$N\equiv r_4(\mathrm{mod}4)$$

用"大衍求一术"求出这个同余式组的最小正整数解 x_0，令

$$M=\left[\frac{x_0+2}{3}\right]$$

$[x]$表示 x 的整数部分. 用 3 除即所谓"用三才衍法约之"，因 $3k$，$3k-1$，$3k-2$ 取实都为 k，故无论 $x_0=3k$，或 $x_0=3k-1$，或 $x_0=3k-2$，$\left[\frac{x_0+2}{3}\right]$ 均等于 k. M 就是所求的蓍数. 注意到 $0<x_0\leqslant 12$，故 M 只能为 1，2，3，4 四个数之一：

$M=1$ 时，称为老阳，取阳爻；

$M=2$ 时，称为少阴，取阴爻；

① 转引自吴文俊主编：《秦九韶与〈数书九章〉》，p. 129，北京师范大学出版社 1987 年版.

$M=3$ 时，称为少阳，取阳爻；

$M=4$ 时，称为老阴，取阴爻.

按照秦氏的“大衍术”解一次同余方程组的方法如下.

设有同余式组：

$$x\equiv r_i(\mathrm{mod}a_i),i=1,2,\cdots,l$$

(1)写出各个模 $a_1,a_2,\cdots,a_l$，称为元数；

(2)求诸元数两两的最大公约数，将其中之一除以其最大公约数，得到 $m_1,m_2,\cdots,m_l$，称为定数；

(3)求诸定数之积 $m=m_1m_2\cdots m_l$，称为衍母；

(4)将衍母除以各定数，得商 $m/m_1,m/m_2,\cdots,m/m_l$，称为衍数；

(5)将每一衍数 m/m_i 对模 m_i 取余数，得到

$$n_1,n_2,\cdots,n_l(n_i=\frac{m}{m_i}(\mathrm{mod}m_i),1\leqslant n_i\leqslant m_i)$$

称为奇数；

(6)求 k_i，使 $k_in_i\equiv1(\mathrm{mod}m_i)$，$k_1,k_2,\cdots,k_l$ 称为乘率；

(7)将乘率 k_i 乘以衍数 m/m_i. 令 $k_im/m_i=s_i$. $s_1,s_2,\cdots,s_l$ 称为用数；

(8)将诸用数乘相应的余数后相加，其和称为总数，记作 N，即

$$N=r_1s_1+r_2s_2+\cdots+r_ls_l$$

(9)将 N 顺次减去衍母 m 的倍数，即得同余式的最小正整数解.

今以秦氏所举的 33 为例，我们有

元数　1,2,3,4

定数　1,1,3,4(因(2,4)=2)

衍母　$1\times1\times3\times4=12$

衍数　12,12,4,3

奇数　1,1,1,3

乘数　1,1,1,3(因 $3\times3\equiv1(\mathrm{mod}4)$)

用数　12,12,4,9

总数　$12\times1+12\times1+4\times3+9\times1=45$

正解　$45-12\times3=9$(最小正解)

$33=9+2\times12$ 为一解,但不是最小正解.

秦九韶对所谓"大衍之数五十,其用四十有九"的解释是:"大衍之数五十",即诸衍数之和为 50;"其用四十有九",即诸用数之和为 49. 但在上表中,诸用数之和为 $12+12+4+9=37$,不为 49. 秦氏解释说:"就其三十七泛为用数,但三十七无意义,兼蓍少太露,是以用四十有九."意谓按推算 37 是合于用数的,不过它缺少哲学的义理,且蓍草太少,易于泄露天机,故必须加以调整而取 49. 于是,秦氏取消了将元数约去最大公因数求定数这一手续,直接对元数求衍数,从而推得:

元数　1,2,3,4

衍数　24,12,8,6

用数　12,24,4,9

这时诸衍数之和为

$$24+12+8+6=50$$

合于"大衍之数五十",而诸用数之和为

$$12+24+4+9=49$$

所以说:"其用四十有九."

这样的调整并不影响最后的答案,因为答案只涉及总数和衍母. 总数为余数与用数之积的和,调整后用数 s_2 整加了 12,相应的余数为 1,故总数增加了 $1\times12=12$,恰为衍母 12 的整数倍. 设调整前后的总数分别为 N 和 N',因

$$N=N'(\mathrm{mod}12)$$

故求得的最小正整数解 x_0 是一致的.

将易法与秦法比较,可发现如下的差别:

(1)大衍之数五十,其用四十有九.

易法　未说明为什么用 50 和 49;

秦法　50 为衍数之和,49 为用数之和.

(2)分而为二以象两.

易法　分 49 为两部分,两部分都参加分揲;

秦法　分 49 为两部分,只取一份参加分揲.

(3)挂一以象三.

易法　从所分的两部分的一份中取掉 1 根;

秦法　所取的一份揲一(即一根一根地数)时,余数必定为 1,所以不必数,称为"挂一".

(4)揲之以四以象四时,归奇于扐以象闰.

易法　将两份蓍草分别四根四根地数,称为"揲四".剩下的余数称为奇,将两份的"奇"都去掉;

秦法　将一份蓍草分别揲一、揲二、揲三、揲四,共揲 4 次,故称"揲四".将每次分揲的余数都去掉,称为"归奇".

(5)三变而得一爻.

易法　连续"揲四"3 次,故称"三变",每次"归奇"后的余数不再参与下一次分揲;

秦法　揲一的结果是预知的,故不计;揲二、揲三、揲四 3 次分揲称为"三变",每次"归奇"的零头仍参与下一次分揲.

(6)四营而成易.

易法　用 4 除得 4 个筮数:9(老阳)、8(少阴)、7(少阳)、6(老阴);

秦法　用 3 除得 4 个筮数:1(老阳)、2(少阴)、3(少阳)、4

(老阴).

可见,除了使用共同的术语外,对术语的解释、分揲的办法、筮数的结果,秦法与易法都是不同的.所以,后人对秦的作法不无微辞,认为是以数学附会儒经的典型.如《四库全书·总目提要》批评秦九韶"竟欲以此易古法则过矣","欲以新术改《周易》揲蓍之法,殊乖古义."①后世数学史家也批评他"极尽穿凿附会之能事,""使得我国古代数学在整数论方面的辉煌成就无端沾染着一层数字神秘主义的色彩,"②其思想根源与僧一行《大衍历议》的"窜入于易以眩众"③一样,是为了眩耀自己.

应该看到,易数源流派的做法不是毫无道理的.第一,在社会文化鄙视数学的时代,数学家敢于眩耀自己的优秀数学成果,并使之提高到经学的地位,以引起社会的重视,吸引更多的优秀人才从"所趋唯明经、进士二科而已"的状态转向数学研究,在客观上对中国古代数学的发展是有好处的.第二,秦法与易法揲蓍成卦的具体方法虽然不同,在逻辑上也没有什么承袭关系,但有一点还是共同的,即都是利用同余式,求出4个连续的正整数.因此,秦氏称"大衍求一术"起源于《周易》,亦属未可厚非.

总之,易数源流派是中国古代数学发展的主力军之一.他们独立地研究数学,却把取得的成果加上易数的外衣,既发展了中国古代数学,也使"易学愈繁"了.

(三)现代科学派

近年来,在易学研究中兴起了"科学易学",不少学者把《周

① 《四库全书·总目提要》,《数书九章》条.

② 钱宝琮:秦九韶《数书九章》研究,《宋元数学史论文集》,p.70,科学出版社1966年版.

③ 阮元:《畴人传》卷16.

易》的思想与现代科学的诸多领域挂起钩来.数学自然是首当其冲,许多现代数学的内容都被人引进易学的范畴.从众多已公开发表或在易学会议上交流的论文分析,现代科学派的研究,可谓五花八门,非常丰富.研究者立论的观点不同,使用的方法互异.根据研究方式的不同,大体上可以把《周易》中的数学研究分成5种类型:

第一种可以称为是标签式的.二进数和计算机原理与《周易》的联系是一个典型的例子.众所周知,一个易卦由阳爻"—"与阴爻"- -"两种符号从下到上排列6个而成.如果我们用1代表阳爻,用0代表阴爻,并把由下到上的直排顺序改成由左向右的横排顺序,那么每一个易卦就表示一个不超过6位的二进数(为统一计,允许保留前几位为0的数码,则64卦都可以看成是6位的二进数),如

䷾→101101_2,䷿→011001_2

等等.因此易卦与二进数有同构关系.在现代数字通信系统和数字计算机中信号都采用二进制数.从这点上说,《周易》与计算机科学有着重要的联系.

《周易》与空间解析几何的联系是又一个典型的例子.在三维空间中建立直角坐标系,将空间分成8个部分,称为卦限.各个卦限中的点的坐标的符号法则顺次是:

(+,+,+),(−,+,+),(−,−,+),(+,−,+)

(+,+,−),(−,+,−),(−,−,−),(+,−,−)

如果我们用阳爻"—"来代替"+"号,用阴爻"- -"来代替"−"号,并把从左到右的顺序改成从下到上的顺序,就得到《周易》中的8经卦:

☰,☱,☲,☳,☴,☵,☶,☷

可见《周易》与空间解析几何有着非常有趣的关系,"卦限"这一

名词盖由此而来.

这种研究方式的例子很多，其特点是：《周易》中某一内容与现代数学某一分支的某一点有完全的共同之处；但除此之外，很少别的联系. 因此，这种方式的研究在数学与易学两方面都无法深入下去，只是相当于在古老的儒家经典《周易》的表面贴上了一块现代数学的标签，其研究并没有实质性的内容. 即以二进数而论，偏重于实际应用的中国古代数学的发展史证明，我国古代从来就使用十进制，过分渲染《周易》中的二进数思想，甚至认为《周易》是计算机科学的发祥地，显然是不适宜的.

第二种是映射式的. 这一研究方式的特点是将某些现代数学的内容，映射为《周易》中的某些内容. 例如，有人撰文将高维几何中的胞腔概念中的某些数据与《周易》中的某些数据联系起来. 文中写道：

"然其具体的数据与中国传统的各种代数数列，包括天干、地支、阴阳、五行等等，可一一对应. 故知中国的易学象数，早在考虑'六合之外'的相应关系，宜二千余年来，难免有神秘性. 今已有多维空间的概念，殊可打破其神秘性，作进一步的科学研究."①

该文是怎样将 n 维胞腔（n 维胞腔的概念将在下文详述）中的数据与"中国传统的各种代数数列"相对应的呢？

"1. $(n+1)$-胞腔

4 维-5 胞腔——五行生克

5 维-6 胞腔——六爻往来

6 维-7 胞腔——七曹变化

① 潘雨庭：易学象数与现代数学，《周易与现代自然科学》，pp. 45～46，中国社会科学出版社 1990 年版.

2. $2n$-胞腔

4 维-8 胞腔——贞悔八卦

5 维-10 胞腔——天干河图

6 维-12 胞腔——地支，十二支

3. 2^n-胞腔

4 维-16 胞腔——中爻，互卦

5 维-32 胞腔——京氏易

6 维-64 胞腔——皇极经世”

此外，$2n$-胞腔与 2^n-胞腔具有对偶性. 该文作者还就 6 维-12 胞腔与 6 维-64 胞腔之间的对偶关系，以易卦有初、二、三、四、五、上 6 个爻位，当作 6 维空间，用长达 12 页的篇幅列出了对应的卦与爻的对应表. 顾明先生随后著文，对上述思想作了较为清楚的解释①.

为了把这一问题弄清楚，我们先对胞腔的概念作一点通俗的解释.

我们知道，直线是一维的，平面是二维的，空间是三维的，推广到高维空间，最方便的是采用分析的方法. 用一个实数 x 表示一维空间的点，用两个有序的实数 (x,y) 表示二维空间的点，用 3 个有序的实数 (x,y,z) 表示三维空间的点，用 4 个有序的实数 (x,y,z,t) 表示四维空间的点，一般地用 n 元有序实数组 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 表示 n 维空间中的点. 用分析的方法来处理 n 维几何是简单而实用的.

另外还有一种纯几何性质的方法，它基于将 n 维的情况退化为 $n-1$ 维的，从而使得可以用数学归纳法来定义高维几何.

① 顾明：《周易象数图说》，pp. 189～190，中国社会科学出版社 1990 年版.

让我们先从二维三角形 ABC 的边界开始. 如图 1.1.3,在 C 点切开多边形,接着把 AC 和 BC 旋转到与 AB 成一条直线. 这样就可得到简单的一维图形,其中 C 出现了两次. 这个一维图形完全表示了二维三角形的边界. 反之,在平面上,弯折线段 AC 和 BC,

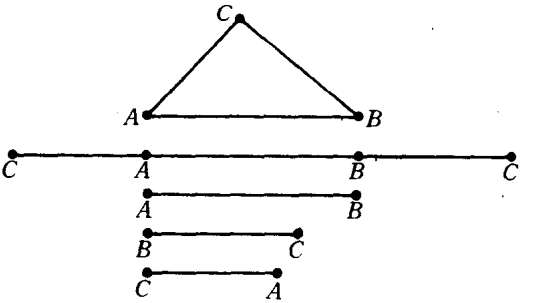


图 1.1.3

使 C 点接在一起,就得到一个二维三角形. 但是,更重要的是,我们并不需要这种弯折,只要承认"等同". 即是说,在图1.1.3中的两个 C 点,即使没有像几何实体在自然意义下那样实际上重合,也不加以区别. 更进一步,取在点 A、B 处分开的三条线段,得到三条线段 CA、AB、BC 的集合,它们可以合在一起,只要使"等同"的点对重合,就又形成一个实在的三角形. 一般的说,三维空间 R_3 中的一个凸多面体,也可用这种方法简化成一组平面凸多边形,或者一组直线段. 很明显,我们可以把这种思想方法反过来,用一组端点适当"等同"的一维线段来定义二维平面上的凸多边形;用二维空间 R_2 中一组边界(一维线段)适当"等同"的二维凸多边形来定义三维空间 R_3 中的凸多面体;用三维空间 R_3 中一组边界(二维凸多边形)适当"等同"的三维凸多面体来定义四维空间中的凸多面体. 一般地,可用 $n-1$ 维空间 R_{n-1} 中

的一组边界($n-2$ 维凸多面体)适当"等同"的凸多面体来定义 n 维空间 R_n 中的凸多面体. 一个 n 维凸多面体恰有 k 个 $n-1$ 维凸多面体为其边界,就称为凸 n 维-k 多面体,所有凸 n 维-k 多面体在拓扑意义下同构,故只要考虑 n 维正多面体. 潘文中 n 维-k 胞腔的含义即指正多面体.

几何学中证明了:

3 维胞腔共有 5 种,即 5 种正多面体,它们是:

3 维-4 胞腔,即正四面体;

3 维-6 胞腔,即正六面体;

3 维-8 胞腔,即正八面体;

3 维-12 胞腔,即正 12 面体;

3 维-20 胞腔,即正 20 面体.

4 维胞腔共有 6 种,它们的边界数、顶点数如下表所示:

名　　称	边界个数和类型	顶点数	对偶性
4 维-5 胞腔	5 个四面体	5	自对偶
4 维-8 胞腔	8 个六面体	16	互对偶
4 维-16 胞腔	16 个四面体	8	
4 维-24 胞腔	24 个八面体	24	自对偶
4 维-120 胞腔	120 个 12 面体	600	互对偶
4 维-600 胞腔	600 个四面体	120	

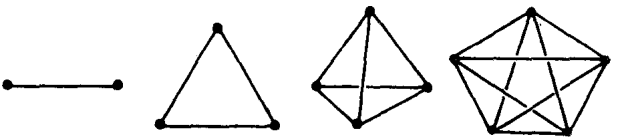
所谓自对偶,是指边界数与顶点数相等,互对偶是指两个胞腔中一个的顶点数等于另一个的边界数,其边界数则等于另一个的顶点数.

5 维以上的空间,都只有 3 种胞腔,其边界数与顶点数如下表:

名　　称	边界个数与类型	顶点数	对偶性
n 维-$(n+1)$胞腔	$(n+1)$个$(n-1)$维-n 胞腔	$n+1$	自对偶
n 维-$2n$ 胞腔	$2n$ 个$(n-1)$维-$(2n-2)$胞腔	2^n	互对偶
n 维-2^n 胞腔	2^n 个$(n-1)$维-n 胞腔	$2n$	

从“组合”或结构的观点来看，利用图论的方法，易于画出 n 维胞腔的表示图.

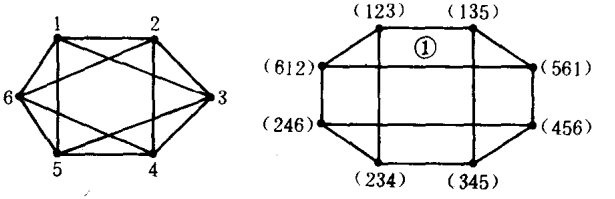
n 维-$(n+1)$胞腔是最简单的，1 维-2 胞腔是线段，2 维-3 胞腔是三角形，3 维-4 胞腔是四面体. 它们分别是 2 阶、3 阶、4 阶的完全图.



1 维-2 胞腔　2 维-3 胞腔　3 维-4 胞腔　4 维-5 胞腔

图 1.1.4　　图 1.1.5

一般地，n 维-$(n+1)$胞腔可画成一个$(n+1)$阶完全图，如 4 维-5 胞腔可画成 5 阶完全图. $(n+1)$阶完全图有 $C_{n+1}^{n}=n+1$ 个 n 阶完全子图，即有 $n+1$ 个$(n-1)$维-n 胞腔，即它的边界.



(a)　　(b)

图 1.1.6

n 维-2^n 胞腔的表示图的画法：可先画一个正 $2n$ 边形，除位于对顶的 n 对顶点之间不连线之外，其余的每两个顶点之间都

连一条线，所得的 $2n$ 阶图就是 n 维-2^n 胞腔的表示图. 例如 3 维-8 胞腔可画成图 1.1.6 的(a). 其中处于对顶位置的顶点 1 与 4、2 与 5、3 与 6 之间不连线，其余的顶点之间都连线.

利用对偶性，不难画出 n 维-$2n$ 胞腔的表示图. 只要将 n 维-2^n 胞腔中的 2^n 个边界作为点，$2n$ 个点作为边界(完全子图)的图就是. 仍以 3 维-8 胞腔的对偶 3 维-6 胞腔为例，其表示图可画成图 1.1.6 的(b). 在图(a)中 8 个边界(123)、(234)、(345)、(456)、(561)、(612)、(135)、(246)成为图(b)中的顶点，图(a)中每一个点关联着 4 个面，例如顶点 1 关联的 4 个边界是(123)、(612)、(561)和(135)，那么图(b)中就由(123)、(612)、(561)、(135)等 4 点决定一个边界面①，余可类推.

根据 n 维-2^n 胞腔图的画法，易于证明，它恰好包含 2^n 个$(n-1)$维-n 胞腔为其边界. 事实上，在我们画出的 n 维-2^n 胞腔图中，共有 n 对顶点$(1,n+1),(2,n+2),\cdots,(n,2n)$未连线. 它的边界$(n-1)$维-$n$ 胞腔是 n 阶完全子图，因而不能包含上述点对中任一对的两个点同时为其顶点，因此对每一对不连线的顶点都恰好有一个为其顶点. 对第一对顶点有 2 种取法，对第二对顶点也有 2 种取法，…对第 n 对也有 2 种取法，共有 2^n 种取法，故恰有 2^n 个 n 阶完全子图，即 2^n 个$(n-1)$维-n 胞腔.

了解了 n 维-k 胞腔的意义之后，就不难发现潘雨庭教授的文章中，将 4 维-5 胞腔对应五行生克，5 维-6 胞腔对应于六爻往来，4 维-8 胞腔对应于八卦，6 维-12 胞腔对应于十二地支，等等. 的确有点牵强附会，除了宣扬《周易》包含了一切科学的预见这样一种言过其实的思想之外，很难说对易学研究有何实际的益处. 因为这种对应方法并无逻辑根据，而且可供对应的数学对象实在太多了. 以“五行生克”而论，数学史上有许多有名的问题都与 5 有关：

正五边形的作图与黄金分割有关，黄金分割则与现代优选法等有密切关系；

法国数学家伽罗华(Galois，1811～1832)证明了5次以上的一元方程的根不可能利用方程的系数通过四则及开方运算求出；

费马(Fermat，1601～1665)数 $2^{2^n}+1$，当 $n=0,1,2,3,4$ 时都是素数，但当 $n=5$ 时，$2^{2^5}+1=641\times6700147$ 却是一个合数，形如 $2^{2^n}+1$ 的素数称为费马素数. 除了前面5个费马数是素数外，没有再发现新的费马素数，也未能证明除了前5个外，不再有费马素数，等等.

是否能说，数学中的这些有趣的现象，也可以和“五行生克”对应呢？总之，笔者认为，用映射派的方式来研究《周易》与数学的联系，也是没有太多实际意义的.

第三种是引伸式的. 这种方式的特点是：从与《周易》有关的一些简单数学命题出发，进一步向纵深发展，研究更深刻的命题. 如傅熙如先生从《洛书》出发引伸到对著名数论难题哥德巴赫(C. Goldbach，1690～1764)猜想的研究. 如图1.1.7启示人们，偶数 $10=1+9=2+8=3+7=4+6=5+5$，其中(3,7)、(5,5)这两组和的加项由两个素数组成，换句话说，在线段 $x+y=10, 0\leqslant x,y\leqslant10$ 上，正好有11个整点：(0,10)、(1,9)、(2,8)、(3,7)、(4,6)、(5,5)、(6,4)、(7,3)、(8,2)、(9,1)、(10,0). 其中有且仅有3个素点(两个坐标均为素数的点)：(3,7)、(5,5)、(7,3). 据傅先生的文章称，他由此出发，进一步证明了一个定理：①

4	9	2
3	5	7
8	1	6

图 1.1.7

① 傅熙如：孙武子-哥德巴赫定理，《中华易学》，第124期，pp. 25～26.

在任何线段

$$x+y=2n,0\leqslant x,y\leqslant 2n$$

(n 为大于或等于 3 的整数)上的 $n+1$ 个整点中,常有素点存在.

这个结果就是脍炙人口的哥德巴赫猜想:

任何大于或等于 6 的偶数,都可以表示为两个奇素数之和.

哥德巴赫猜想是一个难度极大的问题.两个多世纪以来,不少优秀数学家为之绞尽脑汁,迄未最后解决问题.目前最好的结果仍为我国数学家陈景润等的工作.毫无疑问,这个问题的解决需要最深刻的数学思想.傅氏的文章是否真正证明了哥德巴赫猜想,固可存而后论,但即使证明了,也肯定与《周易》没有实质上的关系.

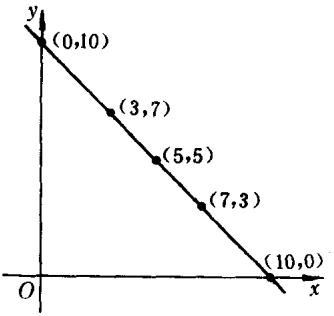


图 1.1.8

又如,有的研究者从《洛书》这种简单的三阶幻方出发,进一步引向对高阶幻方和立体幻方的研究,也属于这种研究方式.

在数学发展史上,人们从一些简单的数学问题出发,引伸到更深刻的问题的研究,取得更多的成果,甚至形成一门新的数学分支的事是常有的.如从我国古代的"田忌赛马"问题导向对策论的研究,从国外"七桥问题"导向图论的研究.等等.因此,引伸式研究者的工作是有意义的.不过,话说回来,《周易》毕竟是几千年前的著作,其中不可能包含有太多的深刻的数学思想,将其中某些问题推广成更深刻的数学问题,用现代数学的工具来研究是可以的;但若希望从《周易》本身中得到实际的数学思想或数学方法来解决推广后的数学命题,例如要想从《周易》中找到

解决哥德巴赫猜想的数学思想那样，一般地说是不可能的.

第四种可以称为是启示式的. 数学家在受到《周易》哲学的启示下，产生了新的数学思想或好的数学方法，从而取得数学研究的成果是可以理解的. 正像哲学可以指导科学研究而不能代替具体的学科研究一样，这种研究方法只是从《周易》的哲学思想中获得了研究数学的启示，而不是发现或研究了《周易》中什么具体的数学内容. 这方面的一个典型的例子是：1983 年吴学谋教授在中国力学会的一次会议上，发表了《泛系方法论与泛系突变分析》一文，指出他创立的泛系分析思想是吸取了《周易》变化的观念. ①

泛系理论重视数学化与数学建模工作，自己有属于数学成分的研究，但是又像理论物理一样，也重视背景哲理与定性分析，只不过比理论物理研究得更广一些，更注意跨专题、跨领域的研究，更注意哲理与方法论性的概括与总结；它不只限于物理研究，更注意研究数理、事理和哲理. 泛系理论与传统哲学或当代流行的系统科学均有所不同，它更注意当代具体科学与新技术，以及与具体科学的具体联系. ②

泛系理论研究的三对象是所谓泛三类，即广义的系统、关系和对称. 但这只是一种方便的说法，实际上有不同层次的一大类对象，可概括为两大关系、三显生、15 泛系（基本概念或范畴）和由泛系扩展生成的 30 多个概念. 所谓泛系的内容有局整、形影、宏微、动静、因果、观控、生克、集散、异同等等. 显然都与《周易》的“一阴一阳之谓道”等思想有一定的亲缘关系.

① 黄沛荣：近十年来海峡两岸易学研究的比较，《周易研究》，1989 年第 1 期.

② 吴学谋：《泛系理论与数学方法》，江苏教育出版社，1990 年版.

《周易》中的某些哲学思想和思维方法，可导出深刻的数学思想的例子似乎还不是个别的．另一个值得指出的是模糊数学的思想．

模糊数学是近三、四十年才发展起来的一个数学新分支．古典的二值逻辑对所有的概念都规定有明确的边界，一切判断都是非真即假，非假即真．但是，在实际生活中，许多概念却是没有明确的边界的．例如“高个子”这一概念，显然不同的地域和不同的人，对“高个子”的标准都是不一致的．就是让某一个人说了算，此人也很难说出一个确定的标准，例如，如果定一个标准是1.75米，那么为什么1.75米的人算高，1.74米的人就不算高？因此，硬性给某些概念规定一个标准，往往是不科学的．换言之，二值逻辑在许多情况下并不适用．比较合理的办法是给出一种“记分”．例如，人们普遍认为1.80米以上的人算“高个子”，1.70米以下的人不算“高个子”，那么就给1.80米以上的身高记分为1，1.70米以下的身高记分为0．至于在1.70～1.80米之间的人，我们并不把他们通通排除在“高个子”之外，而是给他们记一个介于0与1之间的分数．这个分数反映人们对某人是否属于高个子的一种主观印象．如对身高1.78米的人记以0.8分，意即此人符合“高个子”的程度大约80%．

模糊数学就是处理模糊概念的一种数学方法．但是，这种思想早已反映在《周易》之中了．在《周易》中，吉与凶是两个最基本的对立概念．“太极生两仪，两仪生四象，四象生八卦，八卦定吉凶．”但《周易》并不完全使用二值逻辑，凡事非吉即凶，非凶即吉．《周易》在吉与凶之间使用了“吉”、“利”、“亨”、“无咎”、“悔”、“吝”、“厉”、“凶”等等字样．如果将“吉”记分为1，“凶”记分为0，则其余的概念可记分在0～1之间，反映它们对吉、凶的合乎程度．这正是现代模糊数学处理模糊概念方法的先驱．

启示式的数学研究，是数学和易学爱好者的较为实际的作法，也是《周易》这部经典著作可以古为今用之所在，是易学研究中最有生命力的部分之一.

最后，第五种方式可以称为训诂式的，也就是本书中研究《周易》的数学原理的方法.这种研究方法抛开了《易传》中一切形而上学的假定，也拒绝那种把《周易》看成现代科学技术的源头活水的观点，而只是老老实实地把易卦作为一种数学对象来研究，阐释与它有关的现代数学的内容，不作不适当的比附和牵强的引伸.其主要研究内容有：

1.易卦作为一种数学对象来处理，所蕴含的现代数学的内容；

2.《周易》中某些问题，如卦序排列、卦变方法、揲蓍成卦等的数学原理及其与现代数学的联系；

3.历代易学家"援以入易"的某些数学内容的意义及其现代数学描述；

4.数学作为一种工具，如何借以研究易学中的一些疑难问题.

总之，本书对《周易》数学原理的研究，类似于对《周易》语言文字的训诂一样，其最后的目的是为了运用数学工具去研究《周易》中的疑难问题，而不是从《周易》的微言奥义中去寻找现代数学的源头活水.

§1.2 研究《周易》的数学原理的必要性

谈到《周易》中的自然科学思想，学术界有两种截然相反的态度：一种认为《周易》与现代科技的一切联系大抵多是毫无意义的牵强附会.如有人认为："歌颂《周易》重要性者太多，真能说出其所以然者太少，尤其是讲《周易》与西洋近现代的自然科学

相符合者，都未能提出很可靠的具体证据."①而另一些人则相反，认为"近现代一些重大的自然科学的进展，都与《周易》的思想有密切关系.如新型电脑的软硬件改进，生物遗传密码研究的进展，特别是现代浑沌理论的产生，耗散结构的问世，都受到《周易》思想的启示."②显然，这两种过于绝对化的看法，都不是正确的态度.

我们先谈谈研究《周易》中数学原理的必要性.

1.《周易》中的易卦不是一种普通的符号系统，它是一个严密的、内容丰富的代数结构.当我们撇开《周易》经、传的束缚，只把易卦的全体当成一个集合 A，每一个卦都当作 A 的一个元素，在适当地引进运算法则以后，集合 A 就成为一个格、一个布尔代数、一个阿贝尔群，等等.此外，《周易》中的某些内容(如揲蓍成卦)也与概率论、组合论、数论等有密切的联系.即使在今天，对大学数学系的学生讲授集合论、格论、群论、概率论、布尔代数，以及图论、数论的某些概念，易卦集都可作为该数学分支中一个深刻而有趣的例子③.易卦集的数学内容如此丰富，几乎涉及大学数学系所有离散数学课程的领域.这是易学研究工作者不能不考虑的.

2.历代易学家，特别是现代科学易学家们，已经把许多数学概念"援以入易"，这里面真真假假，是是非非，有的是毫无意义的牵强附会，故弄玄虚；也有的是见微知著，思想深刻之作.因此，易学家必须研究《周易》中的数学原理，以资辨别和比较，去

① 蔡尚思：《周易要论》，p.1，湖南教育出版社，1991年版.

② 《推翻传统偏见，恢复〈周易〉真貌》，《文汇报》，1989年6月5日.

③ 欧阳维诚：论易卦的数学原理及其应用，《湘潭大学学报》社科版，1990年第2期.

粗取精，去伪存真，把易学研究引向健康发展的轨道.

3. 数学与人类文明的发展有极为密切的关系，古希腊学者的“万物皆数”，《周易》的象、数、理、占，都说明了古代文化遗产与数学有密切的关系. 易学研究中许多悬而未决的问题，如卦序排列、大衍之数等都与数学有关. 要实现易学研究的现代化，易学家必须适当掌握现代数学工具.

也许有人认为，成书于数千年前的《周易》不可能含有现代数学的内容，即使易卦有丰富的数学结构，但也与《周易》经、传无关，用数学方法去研究《周易》，在实际上有可能吗？回答是肯定的.

1. 虽然易卦集的许多数学内容是脱离经、传，把卦当作一种纯粹的符号推导出来的，但是，易学中有不少研究课题，是只涉及到卦画（如卦变、卦序）而不涉及到义理或象数（如乾为天，坤为地或天一地二之类）的，都必定可以通过只与易卦卦画有关的某些数学概念来描述，转化为数学的对象. 这些课题相互之间的所有联系与逻辑结论，也必然能在其数学描述中得到平行的反映，为我们用数学方法研究某些易学命题提供了坚实的基础.

2. 数学是一种思维科学，是一种“研究空间形式与量的科学.”它不同于计算机等现代科技，后者是人类文明发展到一定阶段的产物，而空间形式与量的许多规律则是不依赖于人类的智力水平而存在的. 在《周易》成书的时代，古人虽然不可能有我们前面提到的那些现代数学的概念，如格、群、布尔代数等，但却可能自觉或不自觉地使自己的思维服从某些数学的定律. 就以群而论，平面铺地砖的图案是一种对称图案，它们都由一个基本图案通过各种不同的方式加以重复而形成. 把重复的方式当作元素，这些元素的集合是一个群，称为平面结晶群或糊墙纸群. 直到 1924 年，数学家才证明，标准形式的对称图案一共只有 17

种.但早在13世纪,数学家还没有建立群的概念时,西班牙的阿尔汗布拉宫已经把全部17种标准对称图案一个不漏地画出来了.不仅是人,即使是动、植物的某些现象,也严格地服从数学的原理.例如蜂巢都是六角形的,数学上可以证明,在原料一定的前提下,这种形状的巢容积最大.某些植物(如樱桃、梨树、柳树)的叶子在茎上的排列方式,也与数学上著名的斐波纳契数列有关.所以,古人虽然没有现代数学的概念,但他们留下的文化遗产却可能隐含着某些现代数学的内容.不使用数学方法,就很难得其底蕴.例如"大衍之数五十,其用四十有九",古人揲蓍成卦为什么用49根蓍草,历来易学家作过种种猜测与讨论,均未得其要领.实际上,当我们把占筮的程序转化为数学模型之后,就不难发现,49就是满足某些简单的初始条件的最佳解(参看第八章§8.3).因此,在古老的《周易》中隐含某些数学内容是不足为怪的.不同的只是,今天的人自觉地运用数学,古人不自觉地遵循数学而已.

3.数学具有高度的抽象性和广泛的适用性.易卦不管它原来是根据什么事物造出的,也不管它实际上有何哲学的义理,但一经抽象为数学的对象,就具有广泛的适用性.人们可以用易卦的模型来解释各种不同的对象,"仁者见之谓之仁,智者见之谓之智",象数易、科学易等各种五花八门的思想,"皆可援易以为说",其立足点在很大程度上依赖于数学的抽象性.因此,研究易卦的数学原理,有助于我们对已经"愈繁"的易学内容鉴别比较,去伪存真.

以上我们不厌其烦地叙述了易学与数学的联系,以及历代易学家数学研究的概况,目的是为了让读者对易学与数学的关系有一个基本的了解.在以下各章,将详细地介绍易卦的各种数学原理,阐释一些易学概念的数学表示,并利用所述及的数学原

理对易学研究中某些悬而未决的难题进行新的探讨.

在所有的论述中,我们将保持数学的严密性,在把易学概念转化为数学模型时,力求合乎数理、哲理、事理的原则.

为了书写和演算的方便,我们用符号 1 代表易卦中的阳爻"—",符号 0 代表阴爻"--",并且把易卦从下到上的直排顺序,改写成从左到右的横排顺序,全部 6 爻写在括号之内,两个符号之间用逗号隔开. 如

乾䷀→(1,1,1,1,1,1)

坤䷁→(0,0,0,0,0,0)

屯䷂→(1,0,0,0,1,0)

蒙䷃→(0,1,0,0,0,1)

……

既济䷾→(1,0,1,0,1,0)

未济䷿→(0,1,0,1,0,1)

以后,如无特别的需要,都把卦写成上述形式,不再说明.

第二章　周易与集合论

方以类聚，物以群分.

——《周易·系辞》

集合论是现代数学的基础，它不仅渗透到了数学的各个领域，也渗透到了许多自然科学和社会科学的领域. 德国数学家康托(G. Cantor，1845～1918)首先提出了集合的概念，他于1872～1897年间发表了一系列关于集合论的论文，奠定了集合论的基础.

《系辞》说："方以类聚，物以群分."这里所说的"类"与"群"就与数学中的"集合"概念非常接近. 易学研究中的许多命题，用集合论的语言来描述，就会更加方便、清楚和精确，有利于揭露问题的本质. 本章先介绍集合论的一些基本概念，然后说明易学问题与集合论中的一些基本概念的联系.

§2.1　集合的概念及其运算

集合是一个不精确定义的概念，通常的数学教科书中都只对它作一些描述性的说明. 一般地说，我们把某些确定的客体的全部称为一个集合(简称集).

集合的客体称为集合的元素，也简称元. 通常用大写拉丁字

母 $A,B,C,\cdots$ 等表示集合，用小写拉丁字母 $a,b,c,\cdots$ 等表示集合的元素. 用记号

$$a\in A$$

表示 a 是 A 的元素；用记号

$$a\notin A(\text{或 } a\in A)$$

表示 a 不是 A 的元素. 我们总是在一定的范围内讨论问题的，这个范围称为论域. 论域中全部元素所组成的集合称为全集，通常用 U 表示. 此外，为了方便，我们把不含任何元素的集合叫做空集，记作$\varnothing$.

表示一个集合通常用两种方法：

第一种方法称为列举法. 即把一个集合的所有元素依次列出在花括号内，例如：

$$A=\{2,3,5,7\}$$

$$B=\{\text{魏、蜀、吴}\}$$

第二种方法称为特征法. 即用适当的语言或符号说明集合的元素具有什么性质，用记号$\{x|x$ 是…$\}$之类的方式表示. 例如

$$N=\{n|n \text{ 是正整数}\}$$

$$D=\{(x,y)|2x-3y=0\}$$

关于集合及其元素，必须注意以下诸点：

(1)一个集合中的元素，可以是有限的，也可以是无限的. 如上例中的 A 与 B 都是有限集，而 N 和 D 则是无限集.

(2)一个集合的元素必须是完全确定的. 也就是说，给定了一个集合 A，那么对任一客体 a 来说，要么 $a\in A$，要么 $a\notin A$，两者必居其一且仅居其一. 否则就不能作成一个集合.

(3)集合中的元素是互不相同的，相同的元素被认为是同一个. 例如，集合$\{1,2,1\}$与集合$\{1,2\}$没有区别.

(4)集合中的元素与列举的顺序无关. 例如$\{1,2,3\}$与$\{2,3,$

1},{3,1,2}等等都是同一个集合.

定义 2.1.1. 如果集合 A 的每一个元素都是集合 B 的元素,即从 $x\in A$ 一定能推出 $x\in B$,则称 A 是 B 的子集,记作

$$A\subseteq B$$

若 $A\subseteq B$,且 B 中至少有一个元素不是 A 的元素,则称 A 是 B 的真子集,记作

$$A\subset B$$

例如,{中国人}这一集合是{人}这个集合的真子集,而{汉族人}又是{中国人}这一集合的真子集.即

$$\{\text{汉族人}\}\subset\{\text{中国人}\}\subset\{\text{人}\}$$

定义 2.1.2 如果集合 A 是集合 B 的子集,集合 B 也是集合 A 的子集,即 $A\subseteq B$,并且 $B\subseteq A$,则称 A 与 B 相等,记作

$$A=B$$

例如,$A=\{1,3,5,7,9\}$,$B=\{x\mid x$ 是小于 10 的奇正整数$\}$,则 $A=B$. 换句话说,两个集合 A 与 B 相等,意味着它们的元素完全相同.

定义 2.1.3 设 A 是全集 U 的一个子集,由 U 中一切不属于 A 的元素所成的集合称为 A 的补集,记作 $\overline{A}$.

例如,$U=\{1,2,3,4,\cdots\}$,$A=\{1,3,5,\cdots\}$,则 $\overline{A}=\{2,4,6,\cdots\}$. 即若 U 为正整数集,A 为奇数集,则 $\overline{A}$ 为偶数集.

定义 2.1.4 由至少属于 A 与 B 两个集合中的一个的那些元素所组成的集合(即将 A 与 B 的元素合在一起,重复的只保留一个所成的集),称为 A 与 B 的并集,记作

$$A\cup B$$

例如,$A=\{1,3,5,7,9\}$,$B=\{2,3,6,9\}$,则 $A\cup B=\{1,2,3,5,6,7,9\}$

定义 2.1.5 由同时属于 A 和 B 两个集合的那些元素所组

成的集合(即取 A 与 B 所有相同的元素作成的集合),称为 A 与 B 的交集,记作

$$A\cap B$$

例如,$A=\{2,3,5,7\}$,$B=\{2,4,6,8\}$,则 $A\cap B=\{2\}$.

注意:两个集合 A 与 B 的交集可能是空集(这意味着 A 与 B 没有相同的元素),即 $A\cap B=\varnothing$. 例如,$A=\{$男人$\}$,$B=\{$女人$\}$,则 $A\cap B=\varnothing$.

集合的并、交和补可以看作集合与集合之间的运算,它可以借助于一种称为文氏(Venn)图的直观图形来示意. 即通常画一矩形表示全集,用一个圆来表示集合. 图 2.1.1 中的阴影部分分别表示 $A\cup B$,$A\cap B$ 和 $\overline{A}$:

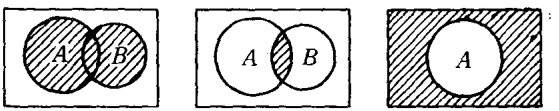


图 2.1.1

两个集合之间的相互关系,可以分为包含($A\subseteq B$ 或 $B\subseteq A$),相离($A\cap B=\varnothing$)和相交($A\nsubseteq B$,$B\nsubseteq A$,且 $A\cap B\neq\varnothing$)三种情况. 图 2.1.2 分别表示包含、相离和相交关系:

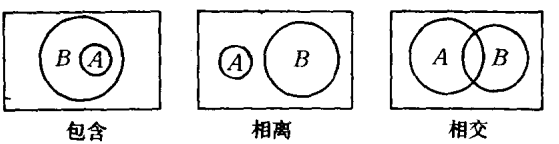


图 2.1.2

集合的并与交可以推广到更多的集合的情形.

定义 2.1.6 设 $S_1, S_2, \cdots, S_n$ 是 n 个集合.

由至少属于这些集合中某一集合 S_i 的元素所成的集合 A，称为这些集合的并集. 记作

$$A = S_1 \bigcup S_2 \bigcup \cdots \bigcup S_n$$

由属于这些集合中每一集合 $S_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 的元素所成的集合 B，称为这些集合的交集. 记作

$$B = S_1 \bigcap S_2 \bigcap \cdots \bigcap S_n$$

例如，$S_1 = \{1,3,5,7,9\}$，$S_2 = \{2,3,5,7\}$，$S_3 = \{1,4,7\}$，则

$$A = S_1 \bigcup S_2 \bigcup S_3 = \{1,2,3,4,5,7,9\}$$

$$B = S_1 \bigcap S_2 \bigcap S_3 = \{7\}.$$

有了集合这一概念，易学中的许多名词、术语、课题都可借助于集合论语言来统一描述.

例题 2.1.1 《周易》中谈到的“两仪”、“四象”、“八卦”、“64别卦(即易卦)”等等，都可以当作一个集合. 例如

两仪集：$A = \{1,0\}$；

四象集：$B = \{(1,1),(1,0),(0,1),(0,0)\}$；

八卦集：$C = \{(1,1,1),(0,0,0),(1,0,0),(0,0,1),(0,1,0),(1,0,1),(1,1,0),(0,1,1)\}$；

易卦集：$D = \{(1,1,1,1,1,1),(0,0,0,0,0,0),(1,0,0,0,1,0),(0,1,0,0,0,1),\cdots\}$.

例题 2.1.2 后人在易学研究中，引进了许多对象，如“三才”、“五行”、“八卦之象”、“十干”等等，也都可以当作一个集合，例如：

三才集：$E = \{$天，地，人$\}$；

五行集：$F = \{$金，木，水，火，土$\}$；

十干集：$G = \{$甲，乙，丙，丁，戊，己，庚，辛，壬，癸$\}$

八卦之象集：$H = \{$天，地，山，泽，水，火，风，雷$\}$.

例题 2.1.3 易 64 卦中有一些特殊的卦，这些卦形成易卦集中某些特殊的子集. 例如：

(1)由 8 经卦自重而得的别卦称为纯卦，8 个纯卦是易卦集 D 的一个子集：

$$D_1=\{(1,1,1,1,1,1),(0,0,0,0,0,0),(0,0,1,0,0,1),(1,1,0,1,1,0),(0,1,0,0,1,0),(1,0,1,1,0,1),(0,1,1,0,1,1),(1,0,0,1,0,0)\}$$

(2)将一个卦倒转过来得到一个新卦，称为原卦的复卦. 例如屯卦(1,0,0,0,1,0)倒转过来是(0,1,0,0,0,1)，即蒙卦，蒙卦就称为屯卦的复卦. 完全对等的，屯卦也是蒙卦的复卦. 有一些卦的复卦仍然是它自己，如离卦(1,0,1,1,0,1)倒过来后还是离卦，这样的卦就称为自复卦. 易卦集中共有 8 个自复的卦，它们作成 D 的一个子集：

$$D_2=\{(1,1,1,1,1,1),(0,0,0,0,0,0),(0,1,0,0,1,0),(1,0,1,1,0,1),(0,1,1,1,1,0),(1,0,0,0,0,1),(0,0,1,1,0,0),(1,1,0,0,1,1)\}$$

(3)将一个卦的 6 个爻都变成相反的爻得一新卦，称为原卦的变卦(也称错卦或旁通). 例如，将屯卦(1,0,0,0,1,0)的 6 个爻都改成相反的爻，就得到(0,1,1,1,0,1)，这是鼎卦. 所以屯卦与鼎卦互为变卦或互为旁通. 易卦集中有一些卦，它的变卦又是它的复卦，如既济卦(1,0,1,0,1,0)的变卦是(0,1,0,1,0,1)，复卦也是(0,1,0,1,0,1)，都是未济卦. 反过来也一样，未济卦的变卦和复卦都是既济卦. 这样的一对卦称为亦复亦变. 易卦集 D 中有 4 对亦复亦变的卦，它们组成易卦集 D 的一个特殊子集：

$$D_3=\{(1,1,1,0,0,0),(0,0,0,1,1,1),(1,0,0,1,1,0),(0,1,1,0,0,1),(0,0,1,0,1,1),(1,1,0,1,0,0),(1,0,1,0,1,0),(0,1,0,1,0,1)\}$$

(4)长沙马王堆出土的汉帛书《易经》把易 64 卦分成 8 组，每组称为“宫”，如第一组(键宫)包含 8 个卦，这 8 个卦也构成易卦集 D 的一个特殊子集，其特点是这些卦的下卦都是乾卦.

$$D_4=\{(1,1,1,1,1,1),(1,1,1,0,0,0),(1,1,1,1,0,0),(1,1,1,0,0,1),(1,1,1,0,1,0),(1,1,1,1,0,1),(1,1,1,1,1,0),(1,1,1,0,1,1)\}$$

例题 2.1.4 对例题 2.1.3 中某些子集施行运算，又得到易卦集 D 中一些别的特殊子集. 例如，由自复卦所成的子集 D_2 与由亦复亦变的卦所成的子集 D_3 的并集，是易卦集 D 中的一个 16 元子集

$$D_5=D_2\cup D_3=\{(1,1,1,1,1,1),(0,0,0,0,0,0),(0,1,0,0,1,0),(1,0,1,1,0,1),(1,0,0,0,0,1),(0,1,1,1,1,0),(0,0,1,1,0,0),(1,1,0,0,1,1),(1,1,1,0,0,0),(0,0,0,1,1,1),(1,0,0,1,1,0),(0,1,1,0,0,1),(0,0,1,0,1,1),(1,1,0,1,0,0),(1,0,1,0,1,0),(0,1,0,1,0,1)\}$$

$=\{$乾，坤，坎，离，颐，大过，小过，中孚，泰，否，随，蛊，渐，归妹，未济，既济$\}$

D_5 中的卦或者自复，或者两两亦复亦变，在第八章 § 8.2 中我们会看到，这个子集与通行本《周易》的卦序，即 64 别卦的排列顺序有关.

由 8 个纯卦组成的子集 D_1 与由自复卦组成的子集 D_2 的交集，是一个易卦集 D 的 4 元子集，它的 4 个元素是：乾、坤、坎、离，即

$$D_6=D_1\cap D_2=\{(1,1,1,1,1,1),(0,0,0,0,0,0),(0,1,0,0,1,0),(1,0,1,1,0,1)\}.$$

这个子集也是易卦集的一个很有用的特殊子集.

§2.2 二元关系

为了研究集合的性质，只列举出集合的元素本身是不够的，常常还需要了解元素之间的相互关系，因此在本节中我们要介绍集合论的一个重要概念——二元关系.

在介绍二元关系之间，先看一个例子.

假定有一家企业要选出一名男性经理和一名女性副经理组成领导班子. 推荐出任经理的男性候选人有 4 名，设为 a,b,c,d；出任副经理的女性候选人有 3 名，设为 x,y,z. 这里涉及两个候选人集合：

男性经理候选人集合 $A=\{a,b,c,d\}$；

女性副经理候选人集合 $B=\{x,y,z\}$.

那么选举的结果将有 $4\times3=12$ 种可能. 如果把 a 当经理，x 当副经理这一结果记作 (a,x)，则 12 种可能的结果如下：

$$(a,x),(a,y),(a,z),(b,x),(b,y),(b,z)$$

$$(c,x),(c,y),(c,z),(d,x),(d,y),(d,z)$$

现在把这些“对子”当作新的元素，又可以组成一个以“对子”为元素的新集合，在数学上给这种“对子”和由“对子”组成的集合一种特殊的名称.

定义 2.2.1 设 A 与 B 是两个集合（A 与 B 可以相同也可以不同），在 A 中取一个元素 a，在 B 中取一个元素 b，作成一个有序的元素对 (a,b)（注意 A 中的元素 a 一定要写在 B 中的元素 b 之前），称为 A 与 B 中元素的一个序偶. 由两个集合 A 与 B 的所有序偶组成的集合

$$D=\{(a,b)\mid a\in A,b\in B\}$$

称为 A 与 B 的笛卡儿积. 记作

$$D=A\times B$$

例如，设 $A=\{1,2,3\}$，$B=\{x,y\}$，则$(1,x)$，$(2,x)$，$(3,y)$等都是 $A\times B$ 的元素，但是$(x,1)$不是 $A\times B$ 的元素，而是 $B\times A$ 的元素. 由 A 与 B 作成的笛卡儿积分别是：

$$A\times B=\{(1,x),(1,y),(2,x),(2,y),(3,x),(3,y)\}$$

$$B\times A=\{(x,1),(x,2),(x,3),(y,1),(y,2),(y,3)\}$$

$$A\times A=\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),$$
$$(3,1),(3,2),(3,3)\}$$

$$B\times B=\{(x,x),(x,y),(y,x),(y,y)\}$$

注意，序偶(a,b)与两个元素的集合$\{a,b\}$是完全不相同的概念：(a,b)是一个元素，$\{a,b\}$是一个集合；(a,b)中的 a 与 b 是有次序的，一般地(a,b)与(b,a)是不同的序偶，$\{a,b\}$中的 a 与 b 则没有顺序，$\{a,b\}$与$\{b,a\}$是同一集合；(a,b)中的 a 与 b 可以相同也可以不同，而$\{a,b\}$中的 a 与 b 必须是不同的元素.

从上述的例子不难看出下面的

定理 2.2.1 若集合 A 有 m 个元素，集合 B 有 n 个元素，则它们的笛卡儿积 $A\times B$ 有 mn 个元素.

如果在集合 A 与 B 的笛卡儿积 $A\times B$ 中取一部分序偶就得到 $A\times B$ 的一个子集，例如，在上面选举正、副经理的例子中，如果大家经过讨论协商，认为 12 种可能的安排中，只有(a,x)，(a,y)，(c,x)三种安排可以进一步考虑，其余的 9 种安排都不理想，先予排除. 于是，下一步就不必在 $A\times B$ 中，而只要在 $A\times B$ 的子集 $R=\{(a,x),(a,y),(c,x)\}$上来讨论问题了.

定义 2.2.2 两个集合 A 与 B 的笛卡儿积 $A\times B$ 的一个子集 R，称为 A 与 B 的一个二元关系.

若 $a\in A,b\in B,(a,b)\in R$，则称 A 的元素 a 与 B 的元素 b 具有关系 R；若$(a,b)\notin R$，则称 a 与 b 没有关系 R.

二元关系可以作为许多实际问题的数学模型，实际问题中

的每一个数学的或逻辑的性质，都可以在关系的数学性质或逻辑性质中得到平行的反映.

下面是一些二元关系的例子：

(1)全国高等学校联合招生，设 A 是考生的集合，B 是学校的集合，则录取的结果是 A 与 B 的一个二元关系.

(2)设 A 是一家商店的商品的集合，B 是价格的集合，则该商店的商品价目表是 A 与 B 的一个二元关系.

(3)设有一批论文参与评奖，评奖等级分为一等奖、二等奖、三等奖和不获奖 4 种. 如果用 A 表示论文的集合，B 表示奖励等级的集合，则评奖的结果是 A 与 B 的一个二元关系.

二元关系的概念可以推广到多个集合的情形.

定义 2.2.3 设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是 n 个集合，在 A_1 中取元素 a_1，在 A_2 中取元素 a_2，…在 A_n 中取元素 a_n，作成一个有序的 n 元素组 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$，称为集合 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的一个 n 元序组. $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的所有 n 元序组所成的集合

$$D=\{(a_1, a_2, \cdots, a_n) \mid a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \cdots, a_n \in A_n\}$$

称为集合 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的笛卡儿积，记作

$$D=A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$$

(特殊情况：若 $A_1=A_2=\cdots=A_n=A$ 时，则称 D 为 A 的 n 重笛卡儿积).

$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ 的一个子集 R，称为集合 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的一个关系.

易学研究中的许多概念与集合的关系这一概念有密切的关系.

例题 2.2.1 《系辞》说："易有太极，是生两仪，两仪生四象，四象生八卦."又说："八卦成列，象在其中矣. 因而重之，爻在其中矣."这些话有何哲学的义理，我们暂且不去管它，但从集合

论的观点看，易卦集可以看成另外一些集合的笛卡儿积. 例如

(1)设 $A=\{1,0\}$是“两仪”的集合，作 A 的二重笛卡儿积

$$B=A\times A=\{(1,1),(1,0),(0,1),(0,0)\}$$

就得到“四象”的集合.

作 A 的三重笛卡儿积

$$C=A\times A\times A=\{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1),(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(0,0,0)\}$$

就得到“八卦”的集合.

再作 A 的 6 重笛卡儿积，就得到

$$D=A\times A\times A\times A\times A\times A$$
$$=\{(1,1,1,1,1,1),(0,0,0,0,0,0),(1,0,0,0,1,0),\cdots,(1,0,1,0,1,0),(0,1,0,1,0,1)\}$$

就得到易卦集.

(2)如果从“四象”的集合 B 出发，作 B 的三重笛卡儿积，同样得到易卦集

$$D=B\times B\times B$$

(3)如果从“八卦”的集合 C 出发，作 C 与 C 的笛卡儿积，也得到易卦集

$$D=C\times C$$

(4)易卦集 D 还可以看成是另外一些形式的笛卡儿积，如

$$D=A\times B\times C=A\times A\times B\times B$$
$$=A\times A\times A\times C=\cdots$$

例题 2.2.2 每一个易卦由 6 个爻位组成，如屯卦䷂的 6 个爻位是：

初九、六二、六三、六四、九五、上六

假如我们把它们写成

九初、六二、六三、六四、九五、六上

则每一个卦都是下面两个集合

$$A=\{六,九\}$$

与 $$B=\{初,二,三,四,五,上\}$$

的一个二元关系.

§2.3 函数与映射

初中学生就学过函数的概念. 设1千克苹果价3元,那么 x 千克苹果的价格 y 是多少? 我们知道,y 是 x 的函数

$$y=f(x)=3x$$

对于这个函数,我们可以列出 x 与 y 之间的对应值如下表:

x	1	2	3	…	n	…
y	3	6	9	…	$3n$	…

在这个函数里,自变量 x 取值的集合 $N=\{1,2,3,\cdots,n,\cdots\}$,称为函数的定义域;函数 y 取值的集合 $M=\{3,6,9,\cdots,3n,\cdots\}$,称为函数的值域;根据自变量 x 的值算出 y 值的法则(将 x 乘以3)叫做函数的对应法则.

现在换一个角度来看问题:自变量 x 的值与函数 $y=f(x)$ 的值可以写成 N 与 M 的序偶的形式 $(1,3),(2,6),(3,9),\cdots,(n,3n),\cdots$ 这些序偶是 N 与 M 的笛卡儿积的元素,它们组成 $N\times M$ 的一个子集,或者说是 N 与 M 的一个二元关系. 所以,我们可用关系来重新定义函数.

定义 2.3.1 设 F 是集合 A 与集合 B 的一个二元关系. 如果对于每一个 $x\in A$,都有唯一的 $y\in B$,使序偶 $(x,y)\in F$,则称关系 F 是 A 到 B 的一个映射,或 A 到 B 的一个函数. 简记作

$$F:A\longrightarrow B$$

例如,设 $A=\{1,2,3,4\}$,$B=\{a,b\}$,看 A 与 B 的下列二元关系

$$F_1=\{(1,a),(2,b),(3,a),(4,b)\}$$
$$F_2=\{(1,a),(2,b),(3,b)\}$$
$$F_3=\{(1,a),(1,b),(2,a),(3,a),(4,b)\}$$

根据映射的定义，对于 F_1，因为 A 中每一个 x，都恰好有 B 中唯一的 y(1 有 a，2 有 b，3 有 a，4 有 b)，使 $(x,y)\in F_1$，所以 F_1 是 A 到 B 的映射. 对于 F_2，因为对 A 中的元素 4，找不到 B 中的元素 y，使 $(4,y)\in F_2$，所以 F_2 不是 A 到 B 的映射. 对于 F_3，因为对 A 中的元素 1，B 中有两个元素 a 和 b，使 $(1,a)$ 和 $(1,b)$ 都属于 F_3 (不唯一!)，所以 F_3 也不是 A 到 B 的映射.

以后我们常用小写字母，如 f,g 等表示函数. 设 f 是 A 到 B 的映射，当 $(x,y)\in f$ 时，记作 $y=f(x)$. x 称为自变元或原像，$y=f(x)$ 称为函数值或 x 在映射 f 下的像.

定义 2.3.2 设 f 是 A 到 B 的一个映射，如果 B 中每一个元素 y 都至少是 A 中某一个元素 x 的像，也就是说，y 在 A 中至少有一个原像，则称 f 是 A 到 B 的满射.

若 f 是 A 到 B 的一个映射，如果 A 中不同的元素都有不同的像，换言之，若 $x_1,x_2\in A$，当 $x_1\neq x_2$ 时，就有 $f(x_1)\neq f(x_2)$，则称 f 是 A 到 B 的单射.

若 f 既是 A 到 B 的满射，又是 A 到 B 的单射，则称 f 是 A 到 B 的一一映射或一一对应.

例如，设 $A=\{1,2,3\}$，$B=\{$奇，偶$\}$. 那么，$f=\{(1,$奇$),(2,$偶$),(3,$奇$)\}$ 是 A 到 B 的满射，但不是单射. 因为 $f(1)=f(3)=$奇，1 与 3 的像相同.

又若 $A=\{1,2,3\}$，$B=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$，那么 $f(x)=x^2$ 是 A 到 B 的单射，但不是满射. 因为 A 中不同元素 1,2,3，在 B 中分别有不同的像 1,4,9，但 B 中的 2,3,5,6 等在 A 中没有原像.

再若 $A=\{1,2,3\}$，$B=\{$素数，合数，单位数$\}$，$f=\{(1,$单位数$),(2,$素数$),(3,$素数$)\}$，则 f 是 A 到 B 的一个映射. 但既不是满射，也不是单射. 因为 B 中的元“合数”在 A 中没有原像，所以不是满射；A 中的元 2，3 在 B 中的像都是“素数”，所以也不是单射.

又若 $A=\{1,2,3\}$，$B=\{1,8,27\}$，令

$$f=\{(1,1),(2,8),(3,27)\}$$

则 f 既是 A 到 B 的满射，又是 A 到 B 的单射，即是 A 到 B 的一一映射. 再作一个 B 到 A 的映射

$$g=\{(1,1),(8,2),(27,3)\}$$

很明显，g 也是 B 到 A 的一一映射.

定义 2.3.3 若 f 是集合 A 到 B 的一个一一映射.

$$f=\{(x,y)\mid x\in A,y\in B\}$$

根据 f 可以作一个 B 到 A 的映射 g：将 A 中每一个元素 x 在 f 下的像 y 当作原像，而把 x 当作 y 在映射 g 下的像，即

$$g=\{(y,x)\mid x\in A,y\in B,\text{且}(x,y)\in f\}$$

易知 g 也是一个 B 到 A 的一一映射，则 g 称为 f 的逆映射. 一般把 g 写作 f^{-1}.

显然 f 与 f^{-1} 互为逆映射，f^{-1} 的逆映射就是 f，即

$$(f^{-1})^{-1}=f$$

不是一一映射的映射 f 不存在逆映射.

在日常生活中许多事情都涉及到映射关系，都可以用映射的观点加以描述. 例如

(1)一家公司要招聘 4 名职员，分别担任经理、供销、秘书和会计 4 种职务. 招聘的条件是年龄在 25～35 岁之间，文化程度中专以上(包括中专、大专、本科、研究生 4 个档次)，男女兼收. 下面是招聘结果的名单：

姓名	性别	年龄	学历	职务
赵一	男	32	研究生	经理
钱二	男	28	本科	供销
孙三	女	27	本科	会计
李四	女	25	大专	秘书

这张表上每一直栏都涉及一个集合：

应聘人集合 $A=\{$赵一，钱二，孙三，李四$\}$

性别的集合 $B=\{$男，女$\}$

年龄的集合 $C=\{25,26,\cdots,34,35\}$

学历的集合 $D=\{$中专，大专，本科，研究生$\}$

职务的集合 $E=\{$经理，供销，会计，秘书$\}$

表中除“姓名”一栏外，每一栏都可看作集合 A 到相应集合的一个映射.

性别是 A 到 B 的满射，但不是单射；

年龄是 A 到 C 的单射，但不是满射；

学历是 A 到 D 的映射，但既不是满射，也不是单射；

职务是 A 到 E 的一一映射.

(2)某电视台举办智力竞赛，有一道试题是：“请在右面的作家和他的作品之间联一条线.”这道试题相当于在两个集合

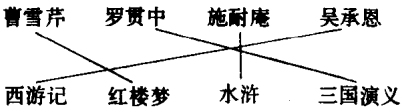


图 2.3.1

$A=\{$曹雪芹，罗贯中，施耐庵，吴承恩$\}$

与 $B=\{$西游记，红楼梦，水浒，三国演义$\}$

之间建立一个一一映射，映射的方法有许多种，只有一种是正确

的.

例题 2.3.1 象数之学是前人研究《周易》的主要方法.《系辞》说:"易者,象也."又说:"圣人设卦观象系辞焉而明吉凶."象数学派认为:《周易》经文是根据象数写下来的.易象有所谓"八卦之象"、"方位之象",等等.此外,还有"纳甲"、"五行"等方法.这些方法的实际意义暂且放下不谈,但从抽象的数学观点却可当作一种映射.

(1)所谓"八卦"之象,是说 8 经卦象征 8 种自然现象.按照古人的说法:

乾为天,坤为地,震为雷,巽为风,

坎为水,离为火,艮为山,兑为泽.

这个"八卦之象"可以看作两个集合

8 经卦集 $A=\{$乾,坤,震,巽,坎,离,艮,兑$\}$

与 8 种自然物集 $B=\{$天,地,雷,风,水,火,山,泽$\}$

之间的一个一一映射.

(2)所谓"方位之象"有两种,《说卦》中提出的一种叫做"后天方位",它的说法是:

震东方,巽东南,离南方,坤西南,

兑西方,乾西北,坎北方,艮东北.

宋儒有另一种方位图,称为"先天方位".宋儒的说法是:

乾南,坤北,离东,坎西,

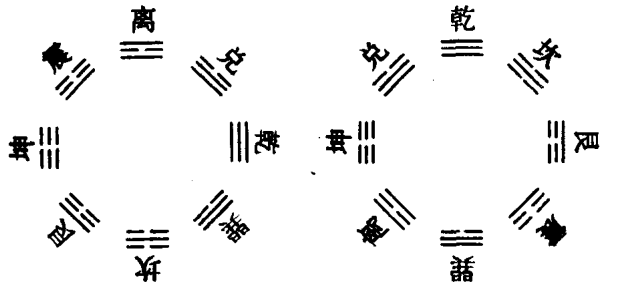
震东北,巽西南,艮西北,兑东南.

图 2.3.2 画出了这两个方位图.这两个方位图,谁是谁非,易学史上有过争论.我们放开争论不谈,只指出所谓"方位之象",是两个集合

八卦之集 $A=\{$乾,坤,震,巽,坎,离,艮,兑$\}$

与 八方之集 $B=\{$东,南,西,北,东南,西南,东北,西北$\}$

之间的两种一一映射.



后天方位(文王八卦)图　　先天方位(伏羲八卦)图

图 2.3.2

(3)汉儒还建立了一种"纳甲说",什么叫"纳甲"呢?据朱震《周易卦图说》:"纳甲何也?举甲以该十日也.乾纳甲壬,坤纳乙癸,震巽纳庚辛,坎离纳戊己,艮兑纳丙丁,皆自下生,圣人仰观日月之运,配之以坎离之象,而八卦十日之义著矣!"这里也涉及两个集合:

八卦集 $A=\{$乾,坤,艮,兑,坎,离,震,巽$\}$

十干集 $B=\{$甲,乙,丙,丁,戊,己,庚,辛,壬,癸$\}$

因为集 A 中的乾对应了集 B 中甲、壬两个元素,所以"纳甲"之法不能看成是集 A 到集 B 的映射.但是,反过来,却可以看作集 B 到集 A 的一个满射.这个映射是:

甲⟶乾,乙⟶坤,丙⟶艮,丁⟶兑,戊⟶坎,

己⟶离,庚⟶震,辛⟶巽,壬⟶乾,癸⟶坤.

(4)汉儒还建立了"八卦"与"五行"之间的联系,联系的方法是:

乾⟶金,坤⟶土,震⟶木,巽⟶木,

坎⟶水,离⟶火,艮⟶土,兑⟶金.

这是“八卦”集

$$A=\{乾,坤,震,巽,坎,离,艮,兑\}$$

与“五行”集

$$B=\{金,木,水,火,土\}$$

之间的映射. 显然这个映射是 A 到 B 的满射.

(5)《系辞》说:“河出图,洛出书,圣人则之.”后人据此附会出 8 经卦起源于“河图”、“洛书”. 据宋人提供的资料,“河图”、“洛书”如图 2.3.3 所示. “洛书”简化后就成为如图 2.3.4 的“九宫图”,后人将 8 经卦与“九宫图”中的数分别对应,称为卦数.

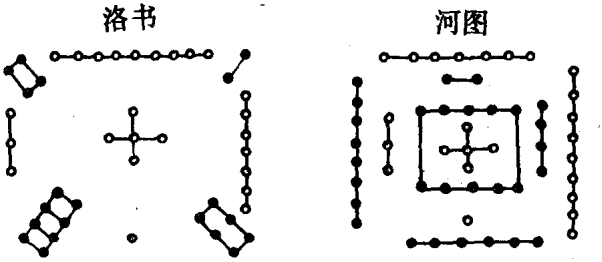


图 2.3.3

四	九	二
三	五	七
八	一	六

巽	离	坤
震		兑
艮	坎	乾

图 2.3.4

这个对应是下面两个集合

$$A=\{乾,坤,震,巽,坎,离,艮,兑\}$$

与 $$B=\{一,二,三,四,五,六,七,八,九\}$$

之间的一个映射.

乾⟶六,坤⟶二,震⟶三,巽⟶四,

坎⟶一,离⟶九,艮⟶八,兑⟶七.

这个映射是 A 到 B 的一个单射，但不是满射. 因为 B 中的元素“五”在 A 中没有原像.

总之，前人讲“易象”，虽然五花八门，令人眼花瞭乱，如果不管它们有何哲学的义理，从数学的抽象看，它们都有一个共同的特征，都可以看作 8 经卦之集到另外某些集合的映射.

§2.4 等价关系与序关系

在集合论中有三类关系特别重要，即函数关系(映射)、等价关系和序关系. 前面我们已介绍了映射关系，现在介绍等价关系和序关系.

在介绍等价关系之前，我们先看一个简单的实例.

假设某校今年注册新生的集合为 S，教务处把新生分成了 n 个班 $A_1, A_2, \cdots, A_n$. 换句话说，把集合 S 分成了 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 这 n 个子集. 很明显，分班应该满足下面的 3 个条件：

(1)每一个班都必须有学生，也就是说，每一个子集都不是空集，即

$$A_i \neq \varnothing \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

(2)任何一个学生都不能同时分到两个班里，即任何两个子集都没有公共元素：

$$A_i \cap A_j = \varnothing \quad (1 \leqslant i < j \leqslant n)$$

(3)任何一个学生都必须分到某一个班去. 即对任意的 $a \in S$，存在一个 A_i，使得 $a \in A_i$，即

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = S$$

把一个集合的元素分型划类，是常见的事情. 根据这个对新生编班的例子的分析，数学上引进了关于集合分类的抽象定义.

定义 2.4.1 设 S 是一个集合，$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是 S 的一些子集，如果满足条件

(1)$A_i \neq \varnothing$ $(i=1,2,\cdots,n)$

(2)$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = S$

(3)$A_i \cap A_j = \varnothing$ $(1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n)$

则称 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 所成的集合

$$\mathscr{F} = \{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$$

是集合 S 的一个划分.

根据划分的定义,前面谈到的新生编班就是新生集合 S 的一个划分. 不过要注意,集合 S 的元素是新生,划分 $\mathscr{F}$ 也是一个集合,它的元素是班.

划分就是将集合的元素分类,分类要有一定的标准. 对不同的集合、不同的分类要求,分类的标准当然是不同的. 但是,不同的标准之间,却也有某些抽象的共同属性. 仍以新生编班的问题为例,编班可能采取不同的标准,如学生入学考试成绩、或学生居住地区等等,不管用的是什么办法,分班显然都具有下述三个性质:

(1)任何一个学生 a 都与自己在同一班上;

(2)若学生 a 与 b 同班,则 b 与 a 也同班;

(3)若学生 a 与 b 同班,b 又与 c 同班,则 a 与 c 也同班.

以上结论是不证自明的. 数学上把它抽象化,提炼出了等价关系的概念.

定义 2.4.2 设 R 是集合 S 的一个关系,如果能满足下述三个条件,就称为等价关系.

(1)自反性:对所有的 $a \in S$,有 $(a,a) \in R$,

(2)对称性:对任意的 $a,b \in S$,若 $(a,b) \in R$,则必有 $(b,a) \in R$;

(3)传递性:对任意的 $a,b,c \in S$,若 $(a,b) \in R$,$(b,c) \in R$,则必有 $(a,c) \in R$.

等价关系对我们来说并不是什么陌生的东西，而是每天都在与它打交道的. 例如，在日常生活中，同姓关系、同乡关系、兄弟关系等都是等价关系，但父子关系则不是等价关系. 在初中数学中，数的相等、三角形的相似等都是等价关系，但小于关系却不是等价关系. 人们常用等价关系对事物分型划类. 例如，设 S 是汉字的集合，则同部首、同笔划数、同韵母、同声母等等都是 S 的等价关系，汉语字典就常借助于这些关系进行编排. 人口统计根据人的年龄、籍贯、性别、文化程度等进行分类统计，显然同年龄、同籍贯、同性别、同文化层次都是一种等价关系.

集合的划分与集合的等价关系有密切的联系.

定义 2.4.3 设 R 是集合 S 的一个等价关系，x 是 S 的一个元素，将 S 中所有与 x 等价的元素作成 S 的一个子集. 这个子集称为 S 关于 R 的一个等价类，记作 $\overline{x_R}$.

例如，S 是中国人的集合，R 是同姓关系，若 x 叫李四，则 $\overline{x_R}$ 就是“姓李的中国人”的集合，它是“中国人”这一集合的子集. 很明显，若 $(x,y)\in R$，则 $\overline{x_R}=\overline{y_R}$. 因为 x 姓李，y 也姓李，$\overline{x_R}$ 与 $\overline{y_R}$ 都表示“姓李的中国人”这一集合.

定理 2.4.1 设 R 是集合 S 的一个等价关系，则 S 关于 R 的一切等价类(相同的只算一个)是 S 的一个划分；反之，若 $\mathscr{T}$ 是 S 的一个划分，则可以决定 S 的一个等价关系，以 $\mathscr{T}$ 的元素为等价类.

证明 先证明定理的前一部分，设 S 关于 R 的不同等价类为：

$$\overline{x_R},\overline{y_R},\overline{z_R},\cdots$$

我们要证明 $\overline{x_R},\overline{y_R},\overline{z_R},\cdots$ 等满足划分的三条件.

(1)任取一个等价类 $\overline{x_R}$，要证明 $\overline{x_R}$ 不是空集. 因为至少有 S 的元素 $x\in\overline{x_R}$，所以 $\overline{x_R}$ 不是空集. 定义 2.4.1 的第一个条件满足.

(2)在 S 中任取一个元素 u，若 u 与 $x,y,z,\cdots$ 中某元素 x 有等价关系，

则$\overline{u_R}$应自成一等价类，$u\in\overline{u_R}$. 这就是说，S 的任一元素都分到某一等价类中. 定义 2.4.1 的第二个条件满足.

(3)设$\overline{x_R}$与$\overline{y_R}$是 S 关于 R 的两个不同的等价类，要证明它们没有公共元素. 如果它们有公共元素 u，则 u 与 x 等价，u 与 y 等价. 于是由$(y,u)\in R$，根据对称性可推出$(u,y)\in R$. 由$(x,u)\in R$ 和$(u,y)\in R$，根据传递性可推出$(x,y)\in R$，即 x 与 y 等价. 因而$\overline{x_R}$与$\overline{y_R}$是同一个等价类，与$\overline{x_R}$和$\overline{y_R}$是不同的等价类的假设矛盾. 这个矛盾证明了$\overline{x_R}$与$\overline{y_R}$没有公共元素，即$\overline{x_R}\cap\overline{y_R}=\varnothing$. 定义 2.4.1 的第三个条件满足.

根据划分的定义 2.4.1，三个条件均能满足，所以，

$$\mathscr{T}=\{\overline{x_R},\overline{y_R},\overline{z_R},\cdots\}$$

是 S 的一个划分.

现在再证明定理的第二部分. 设 $\mathscr{T}=\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$ 是 S 的一个划分. 定义 S 的一个关系 R：当且仅当 x 与 y 同属于某一 A_i 时，$(x,y)\in R$. 我们必须证明，R 同时满足下列三条：

(1)R 是 S 的一个等价关系；

(2)R 的等价类的集 $A=\{\overline{x_R},\overline{y_R},\overline{z_R},\cdots\}$ 就是集合 $\mathscr{T}=\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$；

(3)以 $\mathscr{T}$ 的元素为等价类的关系只有唯一的一个 R.

下面分别证明：

首先证明 R 是 S 的等价关系.

x 与 x 显然必在同一个 A_i 中，故$(x,x)\in R$，即 R 满足自反性. 若 x,y 同在 A_i 中，当然也就是 y,x 同在 A_i 中，即$(x,y)\in R$ 时，必有$(y,x)\in R$. R 是对称的. 若 x 与 y 同在 A_i 中，y 与 z 也同在 A_i 中，必然 x 与 z 也同在 A_i 中. 即$(x,y)\in R,(y,z)\in R$ 时，必有$(x,z)\in R$. R 是传递的. R 满足定义 2.4.2 的三个条件，故 R 是 S 的一个等价关系.

其次证明

$$A=\{\overline{x_R},\overline{x_y},\cdots\}=\mathscr{T}=\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$$

任取 $A_i\in\mathscr{T}$，因 A_i 不是 S 的空子集，必有 S 的元素 $x\in A_i$，易证 x 的等价类$\overline{x_R}$就是 A_i，事实上，任取 $u\in A_i$，则$(x,u)\in R$，于是 $u\in\overline{x_R}$；反之，任取 $u\in\overline{x_R}$，则 u 与 x 等价，根据 R 的定义，只有 u 与 x 同属于 $\mathscr{T}$ 的某一元素 A_j 才有可能. 但因 $\mathscr{T}$ 的任何两个元素 A_i,A_j 作为 S 的子集并没有公共元素，x

只能属于唯一的 A_i，从而 u 也属于 A_i，这就证明了 $\overline{x_i}=A_i$. 即 $\mathscr{T}$ 中任一元素都是 A 中的元素，因而 $\mathscr{T}\subseteq A$.

反之，任取 A 中一等价类 $\overline{x_R}$，若 $u\in\overline{x_R}$，则 u 与 x 等价，$(x,u)\in R$，这意味着，u 与 x 同属于唯一的 A_i 中，因此 $u\in A_i$，即 $\overline{x_R}\subseteq A_i$. 同时，若 $u\in A_i$，则 u 与 x 同属于 A_i，因而有 $(x,u)\in R$，$u\in\overline{x_R}$，即 $A_i\subseteq\overline{x_R}$. 所以 $\overline{x_i}=A_i$. 这意味着 A 中任一元素 $\overline{x_R}$ 都是 $\mathscr{T}$ 中的元素，即 $A\subseteq\mathscr{T}$.

因为 $\mathscr{T}\subseteq A$，$A\subseteq\mathscr{T}$，所以 $\mathscr{T}=A$.

最后证明唯一性.

设 S 还有另一等价关系 R'，也以 $\mathscr{T}$ 的元素为其等价类. 我们要证明 $R'=R$. 设 $(x,y)\in R'$，则 x 与 y 同属于 R' 的等价类 $\overline{x_{R'}}$，根据 R' 的假定，$\overline{x_{R'}}$ 是 $\mathscr{T}$ 中的某一个 A_i，即 x 与 y 同属于 A_i，根据 R 的定义，有 $(x,y)\in R$. 同理，若 $(x,y)\in R$，则 x 与 y 同属于 $\overline{x_R}$，但 $\overline{x_R}$ 就是 $\mathscr{T}$ 中某一个 A_j，而 A_j 又是 R' 的某一等价类 $\overline{z_{R'}}$，于是 $x\in\overline{z_{R'}}$，$y\in\overline{z_{R'}}$，即 $(z,x)\in R'$，$(z,y)\in R'$，根据对称性，$(x,z)\in R'$，再根据传递性 $(x,y)\in R'$. 这就证明了：$R'\subseteq R$，$R\subseteq R'$，即 $R=R'$.

定理 2.4.1 到此证完.

定义 2.4.4 若 R 是集合 S 的一个等价关系，R 的等价类所决定的 S 的划分 $\mathscr{T}=\{\overline{x_R},\overline{y_R},\overline{z_R},\cdots\}$ 称为 S 关于 R 的商集，记作 S/R.

在日常生活中，常常与商集打交道. 例如前面谈到的新生分班，班级的集合就是新生集合的一个商集. 一副桥牌(52 张)所成之集 S 分成 4 种花色，这就是 S 的一个划分，其等价关系 R 是“同一花色”，其商集为

$$S/R=\{\text{黑桃},\text{红心},\text{方块},\text{草花}\}$$

例题 2.4.1 历代易学研究中，有一些问题就涉及到集合的划分.

(1)“卦变”是前人易学研究中的一个重要课题. 他们认为，易 64 卦中有些卦是由另外一些卦变来的. 在总结前人关于卦变

论述的基础上，宋人进一步研究卦变，注意到了将易卦集按卦中所含阳爻(或者阴爻)的个数分类. 如朱熹将李之才的《卦变图》载于他的著作《周易本义》中，其中把 64 卦按阳爻或阴爻的个数进行了分类排列. 他写道：

“凡一阴一阳之卦各六，皆自《复》、《姤》而来；

凡二阴二阳之卦各十有五，皆自《临》、《遯》而来；

凡三阴三阳之卦各二十，皆自《泰》、《否》而来；

凡四阴四阳之卦各十有五，皆自《大壮》、《观》而来；

凡五阴五阳之卦各六，皆自《夬》、《剥》而来.”

令 S 表易卦集，R 是 S 的等价关系：任取 $x,y\in S$，当且仅当 x 与 y 的阳爻个数相同时，$(x,y)\in R$. S 关于 R 的商集为

$$\mathscr{T}=S/R=\{\text{无阳卦，一阳卦，二阳卦，…，六阳卦}\}$$

这个划分就是朱熹关于易卦的分类. “一阳卦”就是等价类“$复_R$”，“二阳卦”是等价类“$临_R$”，…按照《卦变图》的观点，只有同一等价类中的卦才能互变.

(2)在长沙马王堆出土的汉帛书《周易》对于 64 卦的排列，与通行本《周易》的顺序不同，它把 64 卦分成 8 行 8 列，每一行称为一宫，如图 2.4.1 所示. 在下面这个方图中，每一行的 8 个卦的上卦都相同，不同行的卦的上卦都不同. 记易卦集为 S，定义 S 的一个等价关系 R：当且仅当 x 与 y 的上卦相同时，$(x,y)\in R$. 显然，帛书《周易》卦序方图就是 S 对于 R 的一个划分. 每一行(即一宫)中的 8 个卦组成 R 的一个等价类，如$键_R$，$艮_R$，…等. 它的商集是

$$\mathscr{T}=\{\text{键宫，根宫，赣宫，辰宫，川宫，夺宫，罗宫，筭宫}\}$$

一个集合的元素没有顺序关系，尽管就自然数的顺序来说，1 比 2 小，1 在 2 之前，但就二元素集$\{1,2\}$与$\{2,1\}$而言，却认为是一样的，毫无区别. 但是，在实际问题中，有时为了特殊的需要

不能不考虑集合中元素的顺序. 例如，对于数的集合，就常常要考虑数的大小，按大小排列就是一种顺序. 实际上，集合中元素的顺序也是集合的一种关系. 因此，在结束本章之前我们要简单地讨论一下有限集合的顺序关系.

健(乾)宫	䷀	䷪	䷫	䷍	䷡	䷊	䷉	䷅
根(艮)宫	䷳	䷽	䷇	䷕	䷃	䷨	䷑	䷏
赣(坎)宫	䷦	䷾	䷯	䷻	䷜	䷺	䷰	䷵
辰(震)宫	䷲	䷟	䷧	䷿	䷩	䷭	䷔	䷐
川(坤)宫	䷁	䷖	䷆	䷒	䷓	䷎	䷢	䷗
夺(兑)宫	䷮	䷬	䷶	䷞	䷛	䷸	䷄	䷝
罗(离)宫	䷝	䷷	䷱	䷤	䷔	䷍	䷣	䷼
箕(巽)宫	䷸	䷹	䷈	䷌	䷺	䷥	䷙	䷓

图 2.4.1　汉帛书《周易》卦序图

定义 2.4.4　设 R 是集合 S 的一个二元关系.

(1)若 S 中不存在 x，使 $(x,x)\in R$，则称 R 是反自反的；

(2)若从 $(x,y)\in R,(y,x)\in R$，一定推出 $x=y$，则称 R 为反对称的.

例如，设 S 是自然数集，等于关系“$=$”是对称的和自反的. 但小于等于关系“$\leqslant$”却是反对称的，因为若 $x\leqslant y,y\leqslant x$，必定有 $x=y$；不过“$\leqslant$”还是自反的，因为 $x\leqslant x$ 能够成立. 至于小于关系“$<$”，则既是反对称的，又是反自反的. 因为“$x<y$，且 $y<x$”根本

不可能出现，而假的前提下任何结论都是正确的，所以若有 $x<y$ 且 $y<x$，必能推出 $x=y$，即“$<$”关系是反对称的；同时也不存在 x，使 $x<x$，即“$<$”关系也是反自反的.

定义 2.4.5 若集合 S 的二元关系 R 是自反的、反对称的和传递的，则称 R 是 S 的偏序关系，S 称为关于 R 的偏序集.

如果集合 S 的二元关系 R 是反自反的、反对称的和传递的，则称 R 为 S 的一个严格偏序关系，S 称为关于 R 的严格偏序集.

例如，对自然数集 S，“$=$”关系是等价关系，“$\leqslant$”关系则是偏序关系，而“$<$”关系是严格偏序关系.

定义 2.4.6 若关于 R 的偏序集 S 中任何两个元素 x,y 都有关系 R，即 $(x,y)\in R$ 或 $(y,x)\in R$ 总有一个成立，则称 R 为全序关系或线序关系，S 称为关于 R 的全序集或线序集.

例如，若 S 为自然数集，R 为“$<$”关系，则 R 不仅是严格偏序关系，也是全序关系. 因为任何两个自然数 x,y，$x<y$ 或 $y<x$ 总有一个成立.

现将等价关系与顺序关系小结如下（例子一栏中的数集 S 都是自然数集）：

关系名称	关系应满足的条件	例　子
等价	自反性、对称性、传递性	$R_{=}$：$=$关系
偏序	自反性、反对称性、传递性	$R_{\leqslant}$：$\leqslant$关系
严格偏序	反自反性、反对称性、传递性	$R_{<}$：$<$关系
全序	偏序关系，且集中任何两元都有关系	$R_{\leqslant}$：$\leqslant$或$<$关系

以后为方便计，对于偏序关系 R，用 $x\leqslant y$ 代替 $(x,y)\in R$；对于严格偏序关系，则用 $x<y$ 代替 $(x,y)\in R$.

例题 2.4.2 易卦集 S 中 64 卦的排列顺序有多种不同的方式. 例如，通行本《周易》是一种方式，汉帛书《周易》又是一种

方式，还有所谓伏羲卦序、京房卦序等. 对于卦序排列的原则，历代易学家聚讼纷纭，迄无定论.

一般地说，易卦集 S 中的卦并无次序，当将它按某种方式排成次序之后，就确定了一种序关系. 反过来，确定一种序关系，就能把易 64 卦排成一种顺序. 历代对易卦的排序方式不外乎两种办法：一种是从哲学的意义作硬性的规定，《序卦》对通行本《周易》排序的解释就采用这种办法，此处不赘. 另一种办法是根据卦画的结构来建立顺序关系，这种办法很多，略举数例如下.

(1)伏羲卦序：设 x 和 y 是两个卦，先比较两卦的第一爻，若 x 的第一爻是阴爻，y 的第一爻是阳爻，则规定 $x<y$；若 x 与 y 的第一爻同为阴爻或阳爻，则再比较它的第二爻，若 x 的第二爻为阴爻，y 的第二爻为阳爻，则 $x<y$；若 x 与 y 的第二爻也同为阴爻或阳爻，则继续比较第三爻. 余类推. 因为 x 与 y 是不同的卦，不可能所有的爻都同性，最后 $x<y$ 或 $y<x$ 总有一个成立. 按这种方法定义的关系 R 是一个严格的偏序关系，也是全序关系.

特别地，当我们把一个卦转化为二进制数以后，每一个卦就对应于 0～63 中的一个二进制数，如

$$(0,0,0,0,0,0)\longrightarrow 000000_2\longrightarrow 0$$

$$(1,1,1,1,1,1)\longrightarrow 111111_2\longrightarrow 63$$

$$(1,0,1,1,0,1)\longrightarrow 101101_2\longrightarrow 45$$

等等. 上面定义的关系 R 就是二进制数的大小关系，比较爻性相当于从高位到低位比较数字的大小，R 就是“$<$”关系. 因为不存在 0～63 中的整数 x，使 $x<x$，所以“$<$”是反自反的；同时也满足反对称性和传递性. 所以“$<$”是严格偏序关系. 且 0～63 中的任何两个数都可以比较大小，所以“$<$”又是全序关系.

(2)帛书卦序：因为任何一个卦都是由 8 经卦中取两个重叠而成的，如果我们先把 8 经卦硬性规定两种卦序：

乾＜艮＜坎＜震＜坤＜兑＜离＜巽　　(1)

乾＜坤＜艮＜兑＜坎＜离＜震＜巽　　(2)

任取易卦集 S 中的两个卦，规定其顺序如下：

若 x 与 y 的上卦不同，则按次序(1)比较其上卦，若 x 的上卦＜y 的上卦，则规定 $x<y$；

若 x 与 y 的上卦相同，则分两种情况考虑：

若 x 是纯卦(上下卦相同)，y 非纯卦，则规定 $x<y$；

若 x 与 y 均非纯卦，且上卦也相同，则按顺序(2)比较其下卦，若 x 的下卦＜y 的下卦，则规定 $x<y$.

不难验证，这样规定的序关系是 S 的全序关系，也是严格的偏序关系.

(3)我们也可以利用“四象”来规定卦序. 古人把一个卦分成“天、地、人”三部分. 最上两爻为天，中间两爻为人，最下两爻为地. 天、人、地三部分中的每一部分都是“四象”集中的一个元素. 我们先对“四象”集的元素规定一个顺序：

⚋⚋＜⚋⚊＜⚊⚋＜⚊⚊

任取易卦集 S 中的两个卦 x 与 y. 先比较 x 与 y 的“天部”，若“x 的天部”＜“y 的天部”，则规定 $x<y$；若 x 与 y 的“天部”相同，则比较其“人部”，若“x 的人部”＜“y 的人部”，则规定 $x<y$；若“人部”还相同，则再比较“地部”，若“x 的地部”＜“y 的地部”，则规定 $x<y$. 这样就规定了 S 的一个顺序关系 R. 这是一个线序关系，也是严格偏序关系.

不难验证，这个顺序就是伏羲卦序.

(4)以上讲的都是严格偏序关系，也是线序关系. 下面再看一种非线序关系的偏序关系.

设 S 是易卦集，R 是 S 的一个二元关系，即对于任意的 $x, y \in R$，当且仅当下述条件满足时，有 $(x,y)\in R$：

x 与 y 的 6 个爻中，在每一个相同的爻位上，或者 x 与 y 的爻性相同，或者 x 为阴爻而 y 为阳爻.

不难验证，R 是 S 的偏序关系，但不是严格偏序关系，也不是线序关系. 事实上，

1)对任意的 $x\in S$，因 x 与 x 在每一爻位上的爻性都相同，所以 $(x,x)\in R$，即 R 是自反的；

2)对 $x,y\in S$，若 $(x,y)\in R$，且 $(y,x)\in R$，这只有 x,y 在所有爻位上的爻性都相同才有可能，即 $x=y$，这意味着 R 是反对称的；

3)若 $x,y,z\in S$，有 $(x,y)\in R$，且 $(y,z)\in R$，则在每一个爻位上，若 x 是阳爻，由 $(x,y)\in R$ 知 y 必定也是阳爻，再由 $(y,z)\in R$，推出 z 的这一爻也是阳爻，所以 x 与 z 在这一爻位上的爻性必相同；若 x 是阴爻，则不管 z 在这一爻位上的爻性如何，或者 x 与 z 同为阴爻，或者 x 为阴爻，而 z 为阳爻，这就推出 $(x,z)\in R$，即 R 是传递的.

所以，R 是 S 的一个偏序关系.

但是，因为 R 是自反的，所以 R 不是严格偏序关系. 又 S 中有许多元素，如(1,0,1,0,1,0)与(0,1,0,1,0,1)没有关系 R，所以 R 不是线序关系.

第三章　周易与布尔代数

一阴一阳之谓道.

——《周易·系辞》

布尔代数最初是在对逻辑思维法则的研究中出现的. 英国哲学家布尔(G. Boole, 1815～1864)利用数学方法研究了集合与集合之间的关系的法则,他的研究工作后来发展成为一门独立的数学分支. 随着电子技术的发展,布尔代数在自动化技术和电子计算机技术中得到了广泛的应用. 布尔向量是由 0 和 1 两个数码按一定顺序排列的数组,它被广泛地采用为描述具有若干因素,而每种因素都有两种对立状态的事物的数学模型. 我们将看到,易卦集的每一个卦都是一个布尔向量,而易卦集本身则是一个布尔代数. 因此,在本章中我们要介绍有关布尔向量与布尔代数的初步知识. 在介绍这两个概念之前,先介绍运算的概念.

§ 3.1　二元运算

小学生一进学校就开始学习正整数的加法运算,我们来考察一下加法运算的实质:

$$3+5=8$$

如果用 N 表示正整数的集合,被加数 3 和加数 5 是 N 中一对有

次序的元素，即 N 的一个序偶(3,5)，或者说是 N 的二重笛卡儿积 $N\times N$ 中的一个元素，通过“+”这种运算得到 N 中另一个元素 8. 抽象地看，这是 $N\times N$ 中的元素(3,5)通过一种对应法则对应 N 中的元素 8，即

$$(3,5)\longrightarrow 8$$

因此，我们可以说：正整数的加法运算是集合 $N\times N$ 到集合 N 的一个映射.

再看减法运算，令 Z 表整数的集合.

$$3-5=-2$$

被减数 3 与减数 5 仍可看作 $N\times N$ 的一个元素(3,5)，但 -2 不是 N 的元素，而是整数集 Z 的元素. 因此，减法运算可以看作 $N\times N$ 中的元素(3,5)通过一种对应法则对应于 Z 中的元素 -2.

$$(3,5)\longrightarrow -2$$

因此，可以说：正整数的减法运算是集合 $N\times N$ 到集合 Z 的一个映射.

数学中的许多运算和生活中的许多现象都可以这样抽象地看待. 因此，我们可以给出“运算”的抽象定义.

定义 3.1.1 设 A 与 B 是两个给定的集合，A 的二重笛卡儿积 $A\times A$ 到 B 的一个映射，称为集合 A 的一个二元运算.

若 $B\subseteq A$，即当 B 是 A 的子集时，则称运算是封闭的，否则称为不封闭的.

当集合 $A\times A$ 的元素不多时，常常把所有运算结果用一个表列出来，这个表称为运算表.

例如正整数集 N 的加法和减法都是 N 的二元运算，N 的加法是封闭的，N 的减法则是不封闭的.

许多生活中的现象，也可以看作是一种二元运算. 例如，4 人围坐一张方桌搓麻将牌，要通过掷骰子来决定由哪一方开始

抓牌.骰子是正六面体,各面上分别画有 1～6 的点数,可以看成是正整数集 N 的一个子集

$$A=\{1,2,3,4,5,6\}$$

同时掷两枚骰子得出一对数,例如(3,4),可看作 $A\times A$ 的元素,现规定掷骰者的座位为东,按反时针反向依次为南、西、北.投掷骰子后,根据下表的规定,决定由哪一方开始抓牌:

	1	2	3	4	5	6
1	南	西	北	东	南	西
2	西	北	东	南	西	北
3	北	东	南	西	北	东
4	东	南	西	北	东	南
5	南	西	北	东	南	西
6	西	北	东	南	西	北

如掷出(3,4),查表在第 3 行与第 4 列交叉处为"西",便由"西方"开牌.这是 $A\times A$ 到集合 $B=\{$东,南,西,北$\}$的一个映射,即 A 的一个二元运算.上面的表是它的运算表,这个运算显然是不封闭的.

从此例可以看出,运算的定义的外延是极广泛的.我们自然只考虑那些具有某些优良性质的运算,例如满足结合律、交换律等的运算.为方便计,以后我们把集合 $A\times A$ 到 A 的映射,即封闭的运算称为集合 A 的运算.并且,我们也将它的运算称为乘法、加法等,甚至就沿用通常的运算符号"×"、"+"、"·",等等.不过这时的乘法、加法运算,不再是算术里的乘法、加法,而要看具体的集合和具体的映射法则来确定它们的含义.

定义 3.1.2 设$\otimes$和$\oplus$是集合 A 上的两个二元运算.

(1)如果对于任意的 $x,y\in A$,都有

$$x\otimes y=y\otimes x$$

则称⊗满足交换律.

(2)如果对于任意的 $x,y,z\in A$,都有

$$x\otimes(y\otimes z)=(x\otimes y)\otimes z$$

则称⊗满足结合律.

(3)如果对于任意的 $x,y,z\in A$,都有

$$x\otimes(y\oplus z)=(x\otimes y)\oplus(x\otimes z)$$

$$(y\oplus z)\otimes x=(y\otimes x)+(z\otimes x)$$

则称运算⊕对于运算⊗满足分配律.

(4)如果对于任意的 $x,y\in A$,都有

$$x\otimes(x\oplus y)=x,x\oplus(x\otimes y)=x$$

则称运算⊗和⊕满足吸收律.

(4)如果对任意的 $x\in A$,都有

$$x\otimes x=x^2=x$$

则称运算⊗满足幂等律.

例如,正整数的加法和乘法这两种运算都满足交换律和结合律,以及加法对于乘法的分配律,但是不满足吸收律和幂等律.有不有满足吸收律和幂等律的运算呢?有的,我们在第一章中讲到的集合的"交"与"并"两种运算就满足吸收律和幂等律.试看由数 0 和 1 组成的一些集合:

$$\{0\},\{1\},\{0,1\},\varnothing$$

对它们施行∩与∪两种运算,例如

$$\{1\}\cap(\{1\}\cup\{0,1\})=\{1\}\cap\{0,1\}=\{1\}$$

$$\{1\}\cup(\{1\}\cap\{0,1\})=\{1\}\cup\{1\}=\{1\}$$

等等.所以,对于集合 $A=\{\{0\},\{1\},\{0,1\},\varnothing\}$,它的∩与∪两种运算都满足吸收律.又

$$\{0\}\cup\{0\}=\{0\},\{0\}\cap\{0\}=\{0\}$$

$$\{0,1\}\cup\{0,1\}=\{0,1\},\{0,1\}\cap\{0,1\}=\{0,1\}$$

等等，所以 A 的运算 $\cap$ 和 $\cup$ 也满足幂等律.

定义 3.1.3 设$\otimes$是集合 A 的一个二元运算，如果 A 中有这样一个元素 e，使得对任意的 $x\in A$，都有

$$e\otimes x=x(\text{或 } x\otimes e=x)$$

则称 e 是 A 对于运算$\otimes$的左单位元(或右单位元). 当一个左单位元同时又是一个右单位元时，则称为单位元.

如果 A 中有一个元素 θ，对于任意的 $x\in A$，都有

$$\theta\otimes x=\theta(\text{或 } x\otimes\theta=\theta)$$

则称 θ 是 A 对于运算$\otimes$的左零元(或右零元)，一个左零元又是一个右零元时，则称为零元.

例如，在整数集 Z 中，对普通加法来说，数 0 是它的单位元，因为对任何整数 $x\in Z$，都有

$$0+x=x+0=x$$

但 Z 对普通加法没有零元. 对于普通乘法，数 1 是 Z 的单位元，数 0 是 Z 的零元. 因为对任何整数 $x\in Z$，都有

$$0\times x=x\times 0=0,1\times x=x\times 1=x$$

例题 3.1.1 关于易卦的起源，有一种传说是："伏羲画卦，文王重卦."即易卦集中的 64 卦是从 8 经卦中每次取两个重叠而成. 如果我们把一个易卦分成下卦和上卦两个部分，如

$$(1,0,0,0,1,0)\longrightarrow((1,0,0),(0,1,0))$$

就可以把一个易卦看作 8 经卦之集中的一个序偶. 令 A 为 8 经卦的集

$$A=\{(1,1,1),(0,0,0),(1,0,0),(0,1,1),(0,1,0),(1,0,1),(0,0,1),(1,1,0)\}$$

那么，"重卦"就可以看作 A 到易卦集 B 的一个运算. 如把这个运算记作$\otimes$，则

$$(1,0,0)\otimes(0,1,0)=(1,0,0,0,1,0)$$

$$(0,1,1)\otimes(1,0,1)=(0,1,1,1,0,1)$$

这个运算显然是不封闭的，也不满足交换律.

例 3.1.2 设 S 是一个集合，以 S 的所有子集(包括空集 $\varnothing$)组成一个新的集合 A，通常称为 S 的幂集. 记作 $A=2^S$. 今以 $S=\{1,2,3\}$ 为例，S 的幂集 A 为

$$A=\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$$

不难验证，集合的并与交是 A 的两个二元运算，对于 $\cup$ 和 $\cap$ 这两个二元运算来说，满足交换律、结合律、一个对另一个的分配律，吸收律和幂等律，空集 $\varnothing$ 是 $\cup$ 运算的单位元，是 $\cap$ 运算的零元，而 S 本身则是 $\cap$ 的单位元.

现在我们来建立一个 6 元集的幂集 A 与易卦之间的关系.

每一个易卦包含 6 爻，6 个爻的爻位分别称为“初”、“二”、“三”、“四”、“五”、“上”. 令 6 个爻位所成的集为

$$S=\{初,二,三,四,五,上\}$$

考虑 S 的子集 T. 若 T 包含了 S 中某元素，则在该元素前(或后)加一个“九”字；如 T 不包含某元素，则在该元素前(或后)加一个“六”字. 例如，若 S 的子集 T 包含“初”、“四”、“五”3 个爻位，则写成

$$T=\{初,四,五\}$$

$$=\{初九,六二,六三,九四,九五,上六\}$$

于是子集 T 便恰好对应了一个易卦(1,0,0,1,1,0)，所以易卦集 A 就是 S 的幂集. 它的 $\cup$ 运算和 $\cap$ 运算满足交换律、结合律、一个对另一个的分配律、吸收律和幂等律，并且，

$$乾卦=\{初九,九二,九三,九四,九五,上九\}$$

是 $\cap$ 运算的单位元；

$$坤卦=\{初六,六二,六三,六四,六五,上六\}$$

是 $\cap$ 运算的零元，是 $\cup$ 运算的单位元.

例题 3.1.3 汉代易学家在易学中引进了“卦变”之说.他们所用的卦变方法门类繁多,但万变不离其宗,所有的卦变都可以用易卦集 A 的一种运算来描述.

考虑由阳爻“1”和阴爻“0”两个元素组成的两仪集 $L=\{0,1\}$.我们规定 L 的一个二元运算⊙,也姑且把这个运算叫做乘法,运算的规则如下:

$$1\odot 1=1,1\odot 0=0,0\odot 1=0,0\odot 0=1$$

即“两个相同的爻相乘得阳爻,两个不同的爻相乘得阴爻.”这个运算显然是封闭的.它的运算规则与有理数运算的符号法则(同号相乘为正,异号相乘为负)相似.阳爻“1”相当于正号,阴爻“0”相当于负号.因此,可把 $L=\{0,1\}$ 的这运算概括为“同性相乘得阳,异性相乘得阴.”根据有理数乘法的符号规则,可知 L 的这个二元运算满足交换律和结合律.

现在可以把 $L=\{0,1\}$ 的这个二元运算推广到易卦集 A 中.定义 A 的一个二元运算,仍把它叫做乘法⊙,规则如下.

设 x 和 y 是易卦集 A 中的两个元素:

$$x=(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6)$$

$$y=(b_1,b_2,b_3,b_4,b_5,b_6)$$

其中 $a_i,b_i\in L=\{0,1\}(i=1,2,\cdots,6)$,那么

$$x\odot y=(a_1\odot b_1,a_2\odot b_2,a_3\odot b_3,a_4\odot b_4,a_5\odot b_5,a_6\odot b_6)$$

其中 $a_i\odot b_i(i=1,2,\cdots,6)$ 按 $L=\{0,1\}$ 的二元运算即“同性相乘得阳,异性相乘得阴”的法则运算.例如,设

$$x=(1,0,0,1,1,0)$$

$$y=(0,1,0,1,0,1)$$

则
$$x\odot y=(1\odot 0,0\odot 1,0\odot 0,1\odot 1,1\odot 0,0\odot 1)$$
$$=(0,0,1,1,0,0)$$

显然,易卦集 A 的乘法也满足结合律和交换律.乾卦=(1,1,1,

1,1,1)是它的单位元.

根据易卦集 A 的这个乘法运算可知:用 A 中元素 y 去乘 A 中元素 x,如果 y 有几个阳爻,则乘积 xy 相当于将 x 在相应的几个爻位上的爻保持不变,而其余爻位上的爻都改变爻性.例如,

$$y=(1,0,1,0,1,0)$$

的第一、第三、第五 3 个爻位上的爻是阳爻,用 y 乘 x,则相当于将 x 的第一、第三、第五 3 个爻位上的爻保持不变,而把 x 的第二、第四、第六 3 个爻位上的爻改成相反的爻.例如

$$x=(0,1,1,1,0,0)$$

则
$$\begin{aligned} x\odot y&=(0,1,1,1,0,0)\odot(1,0,1,0,1,0)\\ &=(0\odot 1,1\odot 0,1\odot 1,1\odot 0,0\odot 1,0\odot 0)\\ &=(0,0,1,0,0,1)\end{aligned}$$

恰好是将 x 的第一、第三、第五 3 个爻不变,而第二、第四、第六 3 个爻变成相反的爻.

现在,我们来看汉儒的"卦变"方法与易卦集 A 的乘法运算的关系."卦变"的方法很多,举其要者有:

(1)往来　将一个卦 x 中爻性相反的两个爻交换位置就得到一个新卦 u,这种卦变方法称为"往来".例如,

$$x=(0,0,1,1,1,1)$$

x 的第二爻和第三爻爻性相反,交换这两个爻的位置就得到另一个卦

$$u=(0,1,0,1,1,1)$$

从 x 变为 u,相当于将 x 乘以一个"二阴之卦",两个阴爻的位置恰好在要交换的两爻,即第二爻和第三爻上,即 $y=(1,0,0,1,1,1)$.于是

$$\begin{aligned} x\odot y&=(0,0,1,1,1,1)\odot(1,0,0,1,1,1)\\ &=(0,1,0,1,1,1)=u\end{aligned}$$

(2)消息　将一个卦 x 的某爻(或某几爻)改变其爻性而得到另一个卦 u 的卦变方法称为“消息”.将阳爻改为阴爻称为“消”,将阴爻改为阳爻称为“息”.例如

$$x=(0,0,0,0,0,0)$$

将 x 的第一爻“息”去,就得一新卦

$$u=(1,0,0,0,0,0)$$

这相当于用一个“一阴之卦”y(阴爻的位置与 x 中要息去的爻在同一爻位上),即 $y=(0,1,1,1,1,1)$.

$$x\odot y=(0,0,0,0,0,0)\odot(0,1,1,1,1,1)$$
$$=(1,0,0,0,0,0)=u$$

同样地,设

$$x=(1,0,1,1,1,0)$$

将 x 的第三爻和第五爻“消去”,变为阴爻,则得到另一个卦

$$u=(1,0,0,1,0,0)$$

这相当于用一个“二阴之卦”(两个阴爻位于要“消”去的爻位上)$y=(1,1,0,1,0,1)$ 去乘 x 的结果

$$x\odot y=(1,0,1,1,1,0)\odot(1,1,0,1,0,1)$$
$$=(1,0,0,1,0,0)=u$$

(3)旁通　将一个卦的 6 个爻同时改变爻性的卦变方法叫做“旁通”.例如

屯卦$=(1,0,0,0,1,0)$

与　　鼎卦$=(0,1,1,1,0,1)$

互为旁通.欲求一个卦 x 的旁通卦相当于用一个“六阴之卦”,即坤卦$=(0,0,0,0,0,0)$ 去乘 x.

$$(1,0,0,0,1,0)\odot(0,0,0,0,0,0)=(0,1,1,1,0,1)$$

(4)上下象易　将一个卦的上卦和下卦交换位置而得一新卦的卦变方法,称为“上下象易.”例如,

谦卦＝(0,0,1,0,0,0)

的下卦为(0,0,1)，上卦为(0,0,0)，交换上、下卦的位置后得一新卦

剥卦＝(0,0,0,0,0,1)

将一个卦 x 上下象易，相当于用某一纯卦 y 去乘 x. 例如

$$(0,0,1,0,0,0)\odot(1,1,0,1,1,0)=(0,0,0,0,0,1)$$

$$(1,1,0,0,0,1)\odot(1,0,0,1,0,0)=(0,0,1,1,1,0)$$

(0,0,1,0,0,0)与(0,0,0,0,0,1)以及(1,1,0,0,0,1)与(0,0,1,1,1,0)显然分别是上下象易的. 为什么一个卦乘以某纯卦后变为上下象易的卦呢？这个道理不太显然，现略加解释. 纯卦共有8个，即

乾＝(1,1,1,1,1,1)，　坤＝(0,0,0,0,0,0)

震＝(1,0,0,1,0,0)，　巽＝(0,1,1,0,1,1)

坎＝(0,1,0,0,1,0)，　离＝(1,0,1,1,0,1)

艮＝(0,0,1,0,0,1)，　兑＝(1,1,0,1,1,0)

纯卦的特点是上、下卦相同，因此，它的第一爻与第四爻同性，第二爻与第五爻同性，第三爻与第六爻同性. 象数派易学家把一个卦的6个爻分成三组，称为“相应”. 即第一爻与第四爻相应，第二爻与第五爻相应，第三爻与第六爻相应. 两个相应的爻如果同性，称为“敌应”；如果爻性相反，称为“顺应”. 显然，三组相应的爻都敌应的只有纯卦. 今将一个卦 x 通过上下象易变为卦 u，相当于将 x 的第一爻与第四爻互换，第二爻与第五爻互换，第三爻与第六爻互换. 换言之，将 x 的每一对相应爻互换，就得到其上下象易的卦 u. 因此，若 x 的一对相应爻都同性，则将 x 变为 u 后，两个爻都没有改变，这相当于用一个在这两爻位上都是阳爻的卦去乘 x；若 x 的一对相应爻异性，则将 x 变为 u 后，两个爻都改变了爻性，这相当于用在这个爻位上的爻都是阴爻的卦去乘

x. 因此，将 x 上下象易变为 u，相当于用一个在三组相应爻位的爻都同性的卦，即三组相应爻都敌应的纯卦 y 去乘 x 的结果. 例如

$$x=(1,0,1,1,0,0)$$

的第一爻与第四爻同性，第二爻与第五爻同性，第三爻与第六爻异性. 那么，取一个第一爻与第四爻同为阳爻，第二爻与第五爻同为阳爻，第三爻与第六爻同为阴爻的卦，即纯卦

$$y=(1,1,0,1,1,0)$$

去乘 x，就得到它的上下象易卦 u

$$\begin{aligned}u&=x\odot y\\&=(1,0,1,1,0,0)\odot(1,1,0,1,1,0)\\&=(1,0,0,1,0,1).\end{aligned}$$

§ 3.2 布尔代数

在 § 3.1 中我们介绍了集合中的二元运算和某些运算的性质. 一般地，一个集合 A 以及在 A 中定义了的几种运算合在一起，就称为一个代数系统. 不同的集合与不同的运算就形成不同的代数系统. 布尔代数是一种特殊的、有用的代数系统. 我们将看到，在适当地定义了易卦集的运算之后，它就是一个布尔代数.

定义 3.2.1 给定一个集合 A，如果在 A 中定义了两种二元运算，分别称之为加法与乘法，并用符号$\oplus$与$\otimes$表示之. 这个集合 A 与它的两个运算所构成的代数系统，如果满足下列全部条件，则称为一个布尔代数：

(1)两个运算都满足结合律. 即对任意的 $a,b,c\in A$，都有

$$(a\oplus b)\oplus c=a\oplus(b\oplus c)$$

$$(a\otimes b)\otimes c=a\otimes(b\otimes c)$$

(2)两个运算都满足交换律. 即对任意的 $a,b\in A$,都有

$$a\oplus b=b\oplus a,a\otimes b=b\otimes a$$

(3)每一个运算对另一运算满足分配律. 即对任意的 $a,b,c\in A$,都有

乘法对加法分配律:

$$a\otimes(b\oplus c)=(a\otimes b)\oplus(a\otimes c)$$

加法对乘法分配律:

$$a\oplus(b\otimes c)=(a\oplus b)\otimes(a\oplus c)$$

(4)在 A 中存在零元和单位元. 即在 A 中存在两个元素,分别记作 θ 和 e,使得对任意的 $a\in A$,下列等式成立

$$a\oplus\theta=\theta\oplus a=a,a\otimes e=e\otimes a=a$$

θ 称为加法的零元;e 称为乘法的单位元.

(5)A 中每一元素都有补元,即对任一 $a\in A$,存在一个对应的元素 $a'\in A$(a' 可以与 a 相同),使得

$$a\oplus a'=e,a\otimes a'=\theta$$

则 a' 称为 a 的补元(显然,这时 a 也是 a' 的补元).

很明显,一个布尔代数涉及到 6 个要素:集合 A,加法运算"$\oplus$",乘法运算"$\otimes$",求补元运算"$'$",零元 θ 和单位元 e. 因此,常用符号$(A,\oplus,\otimes,',\theta,e)$来表示一个布尔代数. 在布尔代数中,运算的顺序按通常的习惯,先括号内后括号外,三种运算的顺序是先求补,再做乘法,最后做加法.

布尔代数是许多实际问题的数学模型.

例题 3.2.1 布尔代数的一个最简单的例子是所谓二值代数.

设 $\beta_1=\{0,1\}$是一个有两个元素的集,定义 β_1 的加法与乘法如下:

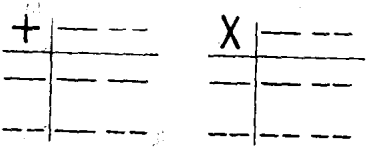
$$1+1=1,1+0=1,0+1=1,0+0=0$$

$$1\times1=1,1\times0=0,0\times1=0,0\times0=0$$

我们不难直接地逐一验证："+"与"×"两个运算都满足结合律，交换律和一个对另一个的分配律．并且 A 有零元 0，单位元 1．0 的补元是 1，1 的补元是 0．所以 β_1 是一个布尔代数．这个代数称为二值代数．

下面看几个二值代数的实例．

(1)当我们将"两仪"之集 $A=\{\ \text{-},\text{—}\}$ 中的阳爻"—"对应于 1，阴爻"- -"对应于 0，按照 β_1 的加法与乘法在 A 中定义运算：



则 $A=\{\text{—},\text{- -}\}$ 是一个二元代数．它的零元是阴爻"- -"，单位元是阳爻"—"；阳爻"—"的补元是阴爻"- -"，阴爻"- -"的补元是阳爻"—"，我们不妨称这个代数为"阴阳代数．"

(2)在形式逻辑中讨论概念和判断，把判断写成陈述句便是命题．我们用小写拉丁字母

$$p,q,r,s,\cdots$$

表示命题．一个命题或者是真的或者是假的，命题的真与假称为命题的真值．我们用 1 表示真命题，0 表示假命题．$p=1$ 意味着 p 是真命题，$q=0$ 意味着 q 是假命题．有些命题是复合的，它们是由另外一些命题通过连接词组合起来的，连接的形式有：

1)合取——两个命题 p 与 q 用"并且"一词连接，组合成一个复合命题，称为 p 与 q 的合取．记作 $p\wedge q$．

2)析取——两个命题 p 与 q 用"或者"(可兼意义下的"或")，组成一个新命题，称为 p 与 q 的析取．记作 $p\vee q$．

3)否定——在命题 p 的前面加上连接词“非”(“不”),组成一个新命题,称为 p 的否定,记作 $\sim p$.

命题的合取、析取、否定的真值由下表给出:

$\vee$	1	0
1	1	1
0	1	0

析取

$\wedge$	1	0
1	1	0
0	0	0

合取

p	0	1
$\sim p$	1	0

否定

现在令 $A=\{0,1,p,q,r,\cdots\}$ 为命题的集合,把命题的析取“$\vee$”作为加法运算“$+$”,命题的合取“$\wedge$”作为乘法运算“$\times$”,否定“$\sim$”作为求补运算“$'$”,假命题 0 作为零元,真命题 1 作为单位元,则 A 与 β_1 同构,即$(A,\vee,\wedge,\sim,0,1)$是一个二值代数,这个代数通常称为逻辑代数.

(3)在电器元件中,电路有串联和并联两种,如果把电路中开关接通的状态记作 1,电路断开的状态记作 0,则两个开关的串联可以看作乘法运算,两个开关的并联可以看作加法运算.那么,一个电路的状态就是一系列运算的结果.两个开关串联或并联时的取值如下图所示:

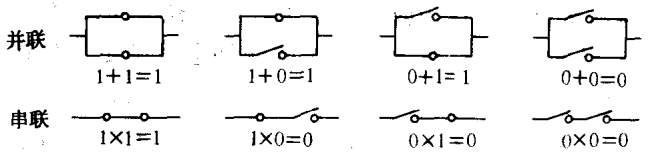


图 3.2.1

令 D 是电路开关的集合,把串联与并联分别作为 D 的乘法与加法运算,0(断开)作为零元,1(接通)作为单位元,按一次开关相当于求补元.则 D 也与 β_1 同构,即$(D,$并联,串联,按开关,$0,1)$是一个布尔代数,这个代数称为开关代数.

例题 3.2.2 在易卦集 S 中引进加法与乘法运算如下. 设 x,y 是 S 的任意两个元素

$$x=(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6)$$

$$y=(b_1,b_2,b_3,b_4,b_5,b_6)$$

规定

$$x+y=(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3,a_4+b_4,a_5+b_5,a_6+b_6)$$

$$x\times y=(a_1\times b_1,a_2\times b_2,a_3\times b_3,a_4\times b_4,a_5\times b_5,a_6\times b_6)$$

其中 $a_i+b_i,a_i\times b_i(i=1,2,\cdots,6)$ 都按例题 3.2.1 中"阴阳代数"即 β_1 的运算法则进行. 例如,设

$$x=(0,1,1,0,1,1)$$

$$y=(1,1,1,0,0,1)$$

则按运算规则及"阴阳代数"的法则,有

$$\begin{aligned}x+y&=(0,1,1,0,1,1)+(1,1,1,0,0,1)\\&=(0+1,1+1,1+1,0+0,1+0,0+1)\\&=(1,1,1,0,1,1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x\times y&=(0,1,1,0,1,1)\times(1,1,1,0,0,1)\\&=(0\times1,1\times1,1\times1,0\times0,1\times0,0\times1)\\&=(0,1,1,0,0,0)\end{aligned}$$

因为两种运算都只在相应的爻位上独立地按 β_1 的运算进行. 已证明 β_1 是布尔代数,故易卦集 S 的两种运算满足交换律、结合律和分配律. 且 S 对加法有零元(0,0,0,0,0,0),对乘法有单位元(1,1,1,1,1,1). 若 x 是 S 的任一元素,将 x 的每一爻按 β_1 的规则换成它的补元,即将 0 改为 1,1 改为 0,就得到 x 的补元. 所以,易卦集 S 对所定义的加法与乘法是一个布尔代数.

例题 3.2.3 在例题 3.1.3 中,我们论证了汉儒所用的一些卦变方法可以看作是易卦集 S 中的一种运算. 即卦 x 变为卦 u,相当于用 S 中的某卦 y 乘 x 的结果,乘法是按"同性相乘得

阳，异性相乘得阴"的法则进行的. 利用布尔代数的运算方法，也可以达到此一目的. 现分别加以论述如下.

(1)旁通　x 的旁通卦就是 x 的补元，因此对 x 求补元 x' 即可.

(2)消息　设卦 x 的第三爻是阳爻，即 $x=(a_1,a_2,1,a_4,a_5,a_6)$. 欲将 x 的第三爻阳爻"消"去，可用"一阴之卦"$y=(1,1,0,1,1,1)$(阴爻在欲"消"去的阳爻的爻位上)乘 x(注意这是按布尔代数的乘法!)即得：

$$x\times y=(a_1,a_2,1,a_4,a_5,a_6)\times(1,1,0,1,1,1)$$
$$=(a_1,a_2,0,a_4,a_5,a_6)$$

又设 $x=(b_1,b_2,b_3,0,b_5,b_6)$的第四爻是阴爻，要"息"去这一阴爻使变为阳爻，可对 x 加上"一阳之卦"$y=(0,0,0,1,0,0)$(阳爻在要"息"去的阴爻所在的爻位上)即得

$$x+y=(b_1,b_2,b_3,0,b_5,b_6)+(0,0,0,1,0,0)$$
$$=(b_1,b_2,b_3,1,b_5,b_6)$$

(3)往来　设 $x=(1,0,c_3,c_4,c_5,c_6)$. 要交换 x 的第一爻和第二爻，可先加上"一阳之卦"$y=(0,1,0,0,0,0)$，再乘以"一阴之卦"$z=(0,1,1,1,1,1)$，即得

$$(x+y)\times z=(x\times z)+(y\times z)$$
$$=(1,0,c_3,c_4,c_5,c_6)\times(0,1,1,1,1,1)$$
$$+(0,1,0,0,0,0)\times(0,1,1,1,1,1)$$
$$=(0,0,c_3,c_4,c_5,c_6)+(0,1,0,0,0,0)$$
$$=(0,1,c_3,c_4,c_5,c_6)$$

§3.3　布尔向量

定义 3.3.1　一个由 0 和 1 两个数码组成的 n 元有序组

$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$　$(a_i\in\{0,1\},i=1,2,\cdots,n)$

称为一个 n 维布尔向量，a_i 称为它的第 i 个分量.

例如，(1,0,1,0)是 4 维布尔向量，(0,0,1)是 3 维布尔向量. 余可类推.

布尔向量常用来作为描述一些具有 n 个因素而每一因素都有两种对立状态的事物的数学模型. 例如某学生参加期终考试，共考 5 门功课，这 5 门功课按固定的顺序排列. 该生第一、第四、第五这三门功课成绩及格，第二、第三门功课成绩不及格. 如果把及格记作 1，不及格记作 0，则这个考生的成绩可以用一个 5 维布尔向量(1,0,0,1,1)来描述.

定义 3.3.2 设 $k\in\beta_1=\{0,1\}$，$x=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$是一个 n 维布尔向量. 利用 β_1 的乘法规则作 k 与 x 的乘法

$$y=kx=(k\times a_1,k\times a_2,\cdots,k\times a_n)$$

其中每一个 $k\times a_i$ 均按 β_1 中的乘法进行. 这个乘法称为 n 维布尔向量在 β_1 中的数乘.

例如，$k=1$，$x=(1,0,1,1,1,0)$，则

$$kx=(1\times 1,1\times 0,1\times 1,1\times 1,1\times 1,1\times 0)$$
$$=(1,0,1,1,1,0)$$

定义 3.3.3 设

$$x=(a_1,a_2,\cdots,a_n),y=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$$

是两个 n 维向量，定义它们的加法与乘法如下：

$$x+y=(a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n)$$
$$x\times y=(a_1\times b_1,a_2\times b_2,\cdots,a_n\times b_n)$$

即运算都对各分量分别进行，而分量的加法与乘都按 β_1 的运算法则进行.

显然，在 n 维布尔向量集中定义了向量的加法与乘法之后，就是一个布尔代数，我们把它记作 β_n.

定义 3.3.4 n 维布尔向量所成之集，在定义了向量的加法

和在 β_1 中的数乘运算之后，所成的代数系统，称为 n 维布尔向量空间，记作 V_n.

注意，定义 3.3.4 中的 n 维布尔向量空间与通常的向量空间是完全不同的概念. 在通常的向量空间中，要求向量集对它的加法成为一个交换群(见本书第四章 § 4.1)，同时向量的数乘只能定义在某一数域上. 在定义 3.3.4 中，V_n 对它的加法不能成为一个交换群，因为除零向量(0,0,…,0)外，其它向量都没有逆元. 而且根据 β_1 的运算法则，它也不能成为一个域.

例题 3.3.1 在本书中，为了排印的方便，我们把易卦的写法作了一些改变，即用 1 代替阳爻"—"，用 0 代替阴爻"- -"，并把爻位从下到上的顺序改为从左到右的顺序. 例如，

䷃(蒙卦)⟶(0,1,0,0,0,1)

䷩(益卦)⟶(1,0,0,0,1,1)

因此，每一个易卦都可以看成一个 6 维布尔向量；反过来，任何一个 6 维布尔向量就是一个易卦. 如

(0,0,0,1,1,1)⟶䷋(否卦)

(0,1,0,0,1,0)⟶䷜(坎卦)

于是我们可以说，一个易卦就是一个 6 维布尔向量，易 64 卦所成的集(在上面规定的运算下)就是 6 维布尔向量空间 V_6.

同样地，每一个 3 爻卦是一个 3 维布尔向量，8 经卦集(在前面规定的运算下)是一个 3 维布尔向量空间 V_3.

定义 3.3.5 设 $x_1, x_2, \cdots, x_k$ 是 V_n 中 k 个 n 维布尔向量，作如下形式的和

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$$

其中 $a_i \in \beta_1 (i = 1, 2, \cdots, n)$. 则称此和为向量组 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的一个线性组合.

例如，在 V_3 中取两个向量 $x_1 = (0,1,0)$，$x_2 = (0,0,1)$，我们

来看向量组 x_1,x_2 的线性组合：

$$0x_1+0x_2=0(0,1,0)+0(0,0,1)$$
$$=(0,0,0)+(0,0,0)=(0,0,0)$$
$$0x_1+1x_2=0(0,1,0)+1(0,0,1)$$
$$=(0,0,0)+(0,0,1)=(0,0,1)$$
$$1x_1+0x_2=1(0,1,0)+0(0,0,1)$$
$$=(0,1,0)+(0,0,0)=(0,1,0)$$
$$1x_1+1x_2=1(0,1,0)+1(0,0,1)$$
$$=(0,1,0)+(0,0,1)=(0,1,1)$$

所以向量组 x_1,x_2 共有 4 个不同的线性组合

$$(0,0,0),(0,0,1),(0,1,0),(0,1,1)$$

定义 3.3.6 令 $S=\{x_1,x_2,\cdots,x_k\}$ 是 n 维布尔向量空间 V_n 的一个子集. 由 $x_1,x_2,\cdots,x_k$ 的所有线性组合所成的 V_n 的子集(重复的线性组合只取一次)，称为 S 的生成空间. 记作$\langle S\rangle$.

例如，对 V_3 的子集 $S=\{(0,1,0),(0,0,1)\}$ 而言，S 的生成空间是

$$\langle S\rangle=\{(0,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(0,1,1)\}$$

定义 2.3.7 令 $S=\{x_1,x_2,\cdots,x_k\}$ 是 n 维布尔向量空间 V_n 的子集，如果 S 中至少有某一向量是其余向量的线性组合，则称 S 是线性相关的. 否则，称 S 是线性无关的.

根据定义 2.3.7，由于零向量 $\theta=(0,0,\cdots,0)$ 可以是任意 r 个向量的线性组合($r\geqslant 1$). 所以，若 S 包含零向量，S 一定是线性相关的；反之，若 S 是线性无关的，S 一定不包含零向量.

例如，对于 $S=\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(1,1,0)\}$，因为 S 中的向量(1,1,0)可以写成其余 3 个向量的线性组合

$$(1,1,0)=1(1,0,0)+1(0,1,0)+0(1,1,0)$$

所以 S 是线性相关的.

但是不难验证：若

$$S=\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$$

则 S 是线性无关的. 事实上，S 中任一向量都不可能是其余两个向量的线性组合. 例如，若(1,0,0)是其余两个向量的线性组合，则有 $a,b\in\beta_1$，使得

$$\begin{aligned}(1,0,0)&=a(0,1,0)+b(0,0,1)\\&=(0,a,0)+(0,0,b)=(0,a,b)\end{aligned}$$

这就得到矛盾. 同样地可以证明，(0,1,0)和(0,0,1)也不可能是 S 中其余两个向量的线性组合，因而 S 是线性无关的.

定义 2.3.8 n 维布尔向量空间 V_n 的一个子集 W，如果满足以下两个条件：

(1)$(0,0,0,0,0,0)\in W$；

(2)若 $x,y\in W$，则 $x+y\in W$.

则称 W 是 V_n 的子空间.

例如，V_3 有 8 个元素：

$$\begin{aligned}V_3=\{&(0,0,0),(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(1,1,0),\\&(1,0,1),(0,1,1),(1,1,1)\}\end{aligned}$$

取 V_3 的两个子集

$$W_1=\{(0,0,0),(0,0,1),(0,1,1)\}$$

$$W_2=\{(0,0,0),(0,0,1),(0,1,0)\}$$

可以验证 W_1 是 V_3 的子空间，因为

(1) $(0,0,0)\in W_1$；

(2) $(0,0,0)+(0,0,1)=(0,0,1)\in W_1$

$(0,0,0)+(0,1,1)=(0,1,1)\in W_1$

$(0,0,1)+(0,1,1)=(0,1,1)\in W_1$

满足子空间的两个条件，所以 W_1 是 V_3 的子空间.

而 W_2 虽然满足第一个条件，即 $(0,0,0)\in W_2$；但不满足第

(2)个条件，因为

$$(0,0,1)+(0,1,0)=(0,1,1)\notin W_2$$

所以，W_2 不是 V_3 的子空间.

定理 3.3.1 令 $S=\{x_1,x_2,\cdots,x_k\}$ 是 n 维布尔向量空间 V_n 的子集，则 S 的生成空间 $\langle S\rangle$ 是 V_n 的子空间. 并且，V_n 的任何一个子空间 W 如果包含 S，也必包含 $\langle S\rangle$.

证明 因为 $\langle S\rangle$ 由 $x_1,x_2,\cdots,x_k$ 的一切线性组合做成，从而零向量

$$\theta=0x_1+0x_2+\cdots+0x_k$$
$$=(0,0,\cdots,0)\in\langle S\rangle$$

子空间定义的条件(1)满足.

其次，在 $\langle S\rangle$ 中任取两个元素 α,β，则有

$$\alpha=a_1x_1+a_1x_2+\cdots+a_kx_k \quad (a_i\in\beta_1,i=1,2,\cdots,k)$$
$$\beta=b_1x_1+b_2x_2+\cdots+b_kx_k \quad (b_i\in\beta_1,i=1,2,\cdots,k)$$

所以

$$\alpha+\beta=(a_1x_1+b_1x_1)+(a_2x_2+b_2x_2)+\cdots+(a_kx_k+b_kx_k)$$
$$=(a_1+b_1)x_1+(a_2+b_2)x_2+\cdots+(a_k+b_k)x_k$$
$$=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_kx_k\in\langle S\rangle$$

子空间定义的条件(2)也满足，所以，$\langle S\rangle$ 是 V_n 的一个子空间.

现在证明定理的第二部分. 设 W 是 V_n 的子空间，且 $S\subseteq W$，要证明 $\langle S\rangle\subseteq W$.

任取 $\alpha\in\langle S\rangle$，则 α 是 $x_1,x_2,\cdots,x_k$ 的线性组合

$$\alpha=a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_kx_k \qquad (*)$$

若 α 是零向量，因 W 是 V_n 的子空间，必有 $\alpha\in W$. 若 $\alpha\neq0$，在 α 的表示式(*)中去掉那些 $a_j=0$ 的项，保留那些 $a_i=1$ 的项，则 α 可写成

$$\alpha=x_{i_1}+x_{i_2}+x_{i_3}+\cdots+x_{i_r}$$

因 $x_{i_1},x_{i_2},\cdots,x_{i_r}\in S$，从而 $x_{i_1},x_{i_2},\cdots,x_{i_r}\in W$. 由于 W 是 V_n 的子空间，由 $x_{i_1},x_{i_2}\in W$ 推出 $x_{i_1}+x_{i_2}\in W$；再由 $x_{i_3}\in W$，推出 $(x_{i_1}+x_{i_2})+x_{i_3}\in W$；如此继续，由于 r 是有限数，最后可得 $\alpha\in W$. 这就证明了 $\langle S\rangle\in W$.

定义 2.3.9 如果 W 是 n 维布尔向量空间 V_n 的一个子空

间，S 是 W 的一个线性无关子集，若$\langle S\rangle=W$，则 S 称为 W 的一个基底.

定量 3.3.2 n 维布尔向量空间 V_n 有唯一的基底

$$S=\{(1,0,\cdots,0),(0,1,0,\cdots,0),\cdots,(0,0,\cdots,1)\}$$

这 n 个布尔向量称为 V_n 的基本向量.

例题 3.3.1 易卦集是一个 6 维布尔向量空间 V_6. 有些卦就可表为另外一些卦的线性组合，例如，

$$(1,1,1,1,1,1)$$
$$=(1,1,0,0,0,0)+(0,0,1,1,0,0)+(0,0,0,0,1,1)$$
$$(1,0,1,1,0,1)=(1,0,0,1,0,0)+(0,0,0,0,0,1)$$
$$+(1,0,0,0,0,0)+(0,0,1,0,0,0)$$

V_6 有许多子空间. 例如 $S=\{(0,1,0,0,1,0),(1,0,1,1,0,1)\}$是线性无关的，它的生成空间是

$$\langle S\rangle=\{(0,0,0,0,0,0),(0,1,0,0,1,0),$$
$$(1,0,1,1,0,1),(1,1,1,1,1,1)\}$$

即$\langle S\rangle$包含乾、坤、坎、离 4 卦.

例题 3.3.2 东汉易学家荀爽等倡“卦变”之说，有一种说法认为：荀氏卦变之说，是以乾、坤两卦生“六子”；由“六子”，即震、坎、艮、巽、离、兑再生其余 56 卦. 另一位东汉人虞翻所讲卦变，后人认为其主旨是以乾、坤两卦生“十辟卦”、“十辟卦”即复、临、泰、大壮、夬、姤、遁、否、观、剥；并由上述十辟卦生其余 52 卦. 怎样由一些卦生出全部易卦呢？并没有详尽的明确的说明. 但是可以肯定的是这里的“生”与易学的义理无关，而只涉及卦画的变化，如前面说到的“消息”、“往来”等办法. 但是，能否通过“六子”、“十辟卦”的生成空间来得到易卦集呢？回答是否定的.

“六子”是：

$$震=(1,0,0,1,0,0)$$

坎＝(0,1,0,0,1,0)

艮＝(0,0,1,0,0,1)

巽＝(0,1,1,0,1,1)

离＝(1,0,1,1,0,1)

兑＝(1,1,0,1,1,0)

“六子”之集是线性相关组.例如,

$$(1,1,0,1,1,0)=(1,0,0,1,0,0)+(0,1,0,0,1,0)$$

它的生成空间仍是8纯卦.

(1,0,0,1,0,0),(0,1,0,0,1,0),(0,0,1,0,0,1)是8纯卦子空间的一个基底.

“十辟卦”是:

复＝(1,0,0,0,0,0)

临＝(1,1,0,0,0,0)

泰＝(1,1,1,0,0,0)

大壮＝(1,1,1,1,0,0)

夬＝(1,1,1,1,1,0)

姤＝(0,1,1,1,1,1)

遯＝(0,0,1,1,1,1)

否＝(0,0,0,1,1,1)

观＝(0,0,0,0,1,1)

剥＝(0,0,0,0,0,1)

“十辟卦”是线性无关的①.它的生成空间是V_6的一个子空间而不是V_6本身.例如这个子空间不能包含V_6中形如$(0,a_2,a_3,a_4,a_5,0)$这种形式的卦.

① 布尔向量空间与通常的向量空间是不同的概念已如前述.一般的n维向量空间中多于n个向量的组一定是线性相关的.

6 个一阳之卦所成的集

$$S=\{(1,0,0,0,0,0),(0,1,0,0,0,0),$$
$$(0,0,1,0,0,0),(0,0,0,1,0,0),$$
$$(0,0,0,0,1,0),(0,0,0,0,0,1)\}$$

是 V_6 的一个基底，它的生成空间$\langle S\rangle$就是易卦集 V_6. 事实上，任取 $\alpha=(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6)\in V_6$，则有

$$\alpha=a_1(1,0,0,0,0,0)+a_2(0,1,0,0,0,0)$$
$$+a_3(0,0,1,0,0,0)+a_4(0,0,0,1,0,0)$$
$$+a_5(0,0,0,0,1,0)+a_6(0,0,0,0,0,1)$$

所以 $\alpha\in\langle S\rangle$.

第四章　周易与群论

乾坤其易之门邪.

——《周易·系辞》

群是现代数学中一个极为重要的概念，它是19世纪法国青年数学家伽罗华(Galois，1811～1832)在研究5次以上代数方程的解法时，于1832年引进的. 群在数学的各个分支中，在许多理论科学和技术科学中都有十分重要的应用. 如相对论中的洛伦兹群，量子力学中的李群，都是现代科学中常识性的工具. 今天群论发展成了一门艰深的数学分支. 我们将看到，在适当地定义了易卦集 A 的运算之后，易卦集 A 就成为一个交换群，它与模2加群同构. 因此，理所当然地可以把群的基本知识应用到易学研究中. 本章先介绍群的基本概念，然后证明易卦集 A 是一个群并讨论易卦群的一些性质及其在易学研究中的应用.

§4.1　群与子群

定义 4.1.1　设 G 是一个非空集合，如果在 G 中定义了一种二元运算(通常把这个运算叫做乘法，乘号一般省略不写)，满足下面4个条件：

(1)乘法运算是封闭的，即对任意的 $a,b\in G$，其积 $ab=c$ 仍

为 G 的元素；

(2)乘法运算满足结合律. 即对任意的 $a,b,c\in G$，都有

$$(ab)c=a(bc)$$

(3)G 中有一个乘法的单位元. 即存在 G 的一个元素 e，对于任意的 $a\in G$，都有

$$ea=ae=a$$

(4)对于 G 中每一个元素都有一个逆元. 即任取 $a\in G$，存在 G 的一个元素 a^{-1}，使

$$aa^{-1}=a^{-1}a=e$$

则称 G 为一个群.

定义 4.1.2 如果一个群 G 的乘法满足交换律，即对任意的 $a,b\in G$，都有

$$ab=ba$$

则称群 G 为交换群或阿贝尔(Abel，1802～1829)群.

群的概念虽然比较抽象，但是具体的群还是很常见的. 例如，设 G 是由 1 与 -1 两个数组成的集合，即 $G=\{-1,1\}$. G 的乘法为普通的乘法，那么 G 就是一个群. 我们来逐条检验 G 对乘法是否符合群的定义的 4 个条件.

(1)由乘法表：

$$1\times 1=1,1\times(-1)=-1$$

$$(-1)\times 1=-1,(-1)\times(-1)=1$$

知 G 对于乘法封闭.

(2)有理数的乘法当然满足结合律.

(3)因为对于 G 中的元 1 和 -1，都有

$$1\times 1=1,(-1)\times 1=1\times(-1)=-1$$

所以 1 是 G 的单位元.

(4)因为 $1\times 1=1,(-1)\times(-1)=1$，即 G 的元素 1 有逆元

1，－1 有逆元－1. G 的所有元素都有逆元.

由于 4 个条件都能满足，所以 G 是一个群. 同时因乘法满足交换律，故 G 是一个交换群.

读者也不难验证，全体整数所成之集 Z 对于普通加法也作成一个交换群，它的单位元是数 0，a 的逆元是 $-a$.

定义 4.1.3 如果群 G 的一个非空子集 H 对于 G 的乘法同样地成为一个群，则称 H 为 G 的子群.

例如偶数集 Y 是整数集 Z 的一个子集. 我们来验证，偶数集 Y 对普通加法也作成一个群.

(1)因为两个偶数相加仍为偶数，所以 Y 对于运算封闭.

(2)数的加法当然满足结合律.

(3)0 是偶数，且对任意的 $y\in Y$，$y+0=0+y=y$，即 0 是 Y 的单位元.

(4)对任意的偶数 $y\in Y$，$-y$ 也是偶数，$y+(-y)=(-y)+y=0$，所以 Y 中每一个元素 y 都有逆元.

Y 对普通加法满足群的 4 个条件，所以 Y 是 Z 的子群.

定理 4.1.1 设 G 是一个群，a 与 b 是 G 中任意两个元素，方程

$$ax=b$$

在 G 中有解. 换句话说，一定可找到 G 的元素 c，使 $ac=b$.

证明 根据群的定义中的条件(4)，对于 G 的元素 a，有一个逆元 a^{-1} 存在. 又根据条件(1)，$a^{-1}b=c$ 是 G 的元素. 根据(2)，有

$$ac=a(a^{-1}b)=(aa^{-1})b=eb=b$$

所以 $c=a^{-1}b$ 就是方程 $ax=b$ 的解.

定理 4.1.2 设 H 是群 G 的非空子集，H 是 G 的子群的充分必要条件是：对于 H 的任意两个元素 a，b，都有 $ab^{-1}\in H$.

证明 先证明条件的必要性. 设 H 是 G 的一个子群. 根据群的性质，H

有单位元 e'. 且对任一 $b\in H$, b 有逆元 b'. 我们先证明: e' 也就是 G 的单位元 e, b' 也就是 b 在 G 中的逆元 b^{-1}. 因为

$$eb=b=e'b$$

两边同乘以 b^{-1}, 即得

$$ebb^{-1}=e=e'bb^{-1}=e'$$

又由 $bb'=e$, 可得

$$b^{-1}=b^{-1}e=b^{-1}(bb')=(b^{-1}b)b'=eb'=b'$$

即得 $b'=b^{-1}$. 因此, a 与 b^{-1} 都属于 H, 由 H 对乘法的封闭性, 即得 $ab^{-1}\in H$.

再证明条件的充分性. H 的运算就是 G 的运算, 故满足结合律. 由于 H 非空, 可取 $a\in H$, 那么 $aa^{-1}=e\in H$, 故 H 有单位元 e. 其次取 H 的元素 e, a, 则 $ea^{-1}=a^{-1}\in H$, 故 H 的任意元 a 在 H 中有逆元. 最后, 任取 a, $b\in H$, 由已证 $b^{-1}\in H$, 于是 $ab=a(b^{-1})^{-1}\in H$, 即 H 对 G 的乘法封闭. 所以, H 对 G 的乘法满足群的条件(1)～(4), 故 H 是 G 的子群.

例 4.1.1 在第三章例题 3.1.3 中, 我们对易卦集引进了一个二元运算⊙. 这个运算的规则如下:

设 x, y 是易卦集 A 中的两个卦, 并设

$$x=(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6),a_i\in L=\{0,1\}$$

$$y=(b_1,b_2,b_3,b_4,b_5,b_6),b_i\in L=\{0,1\}$$

那么, 它们的乘积

$$x\odot y=(a_1\odot b_1,a_2\odot b_2,a_3\odot b_3,a_4\odot b_4,a_5\odot b_5,a_6\odot b_6)$$

其中的 $a_i\odot b_i$ 按 $L=\{0,1\}$ 的二元运算, 即"同性相乘得阳, 异性相乘得阴"的法则进行, 即

$$1\odot 1=1,1\odot 0=0,0\odot 1=0,0\odot 0=1$$

现在, 我们来证明: 易卦集 A 在这个乘法(为简便计, 乘号⊙以后常省略不写)之下是一个交换群.

(1)因为 $a_ib_i\in\{0,1\}$, 所以 xy 也是一个易卦, 即 A 对于乘法封闭.

(2)由于乘法"⊙"的运算规则与有理数运算的符号法则相

同，在第三章例题 3.3.1 中已证明它满足结合律与交换律.

(3)乾卦 $e=(1,1,1,1,1,1)$ 显然是 A 的单位元. 因为对任一 A 中的卦 $x=(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6)$，都有

$$\begin{aligned} xe&=(a_1\odot 1,a_2\odot 1,a_3\odot 1,a_4\odot 1,a_5\odot 1,a_6\odot 1)\\ &=(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6)=x \end{aligned}$$

(4)对于 A 的任一元素 $x=(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6)$，$x$ 本身就是 x 的逆元. 因为

$$\begin{aligned} xx&=(a_1a_1,a_2a_2,a_3a_3,a_4a_4,a_5a_5,a_6a_6)\\ &=(1,1,1,1,1,1)=e \end{aligned}$$

由于 A 对它的乘法“$\odot$”满足群定义的 4 个条件和交换律，所以易卦集 A 是一个交换群. 以后我们称这个群为易卦乘群.

例 4.1.2 在第三章例题 3.1.3 中，我们讨论了汉儒所用的卦变方法，无论是“旁通”、“往来”、“消息”，把卦 a 变为卦 b，都相当于用某一特定的卦 c 去乘 a 的结果. 那里所用的乘法就是易卦群 A 的乘法.

事实上，用一卦 c 去乘一个卦 a，相当于改变卦 a 中某几个爻的爻性，如果卦 c 恰好在这几个爻位上为阴爻的话. 可见，汉儒所用的卦变方法可以把任何一个卦 a，变为另外任何一个卦 b. 即总能找到一个卦 c，使 $ac=b$.

根据定理 4.1.1，对于任意的 $a,b\in A$，方程 $ax=b$ 在 A 中有解 c. 所以，用汉儒的卦变方法可以把任何一个卦 a 变为另外的任何一个卦 b.

例 4.1.3 因为易卦群的元素 a 的逆元就是 a 本身，$a^{-1}=a$. 所以，根据定理 4.1.2，要验证易卦群 A 的某一子集 H 是否 A 的子群时，只要验证当 $a,b\in H$ 时，$ab^{-1}=ab\in H$ 就可以了. 即只要验证 H 对 A 的乘法是封闭的就可以了. 据此，可以验证 A 的一些有趣的子群.

$$H_1=\{乾\}=\{1,1,1,1,1,1\}$$

是 A 的一阶子群(一个有限群有几个元素就叫做几阶群).

$$H_2=\{乾,坤\}=\{(1,1,1,1,1,1),(0,0,0,0,0,0)\}$$

是 A 的二阶子群.

$$\begin{aligned}H_4&=\{乾,坤,坎,离\}\\&=\{(1,1,1,1,1,1),(0,0,0,0,0,0),(0,1,0,0,1,0),\\&\quad(1,0,1,1,0,1)\}\end{aligned}$$

是 A 的 4 阶子群.

$$\begin{aligned}H_8&=\{乾,坤,坎,离,泰,否,既济,未济\}\\&=\{(1,1,1,1,1,1),(0,0,0,0,0,0),(0,1,0,0,1,0),\\&\quad(1,0,1,1,0,1),(1,1,1,0,0,0),(0,0,0,1,1,1),\\&\quad(1,0,1,0,1,0),(0,1,0,1,0,1)\}\end{aligned}$$

是 A 的 8 阶子群.

$$\begin{aligned}H_{16}&=\{乾,坤,坎,离,泰,否,既济,未济,颐,大过,随,\\&\qquad蛊,中孚,小过,渐,归妹\}\\&=\{(1,1,1,1,1,1),(0,0,0,0,0,0),(0,1,0,0,1,0),\\&\quad(1,0,1,1,0,1),(1,1,1,0,0,0),(0,0,0,1,1,1),\\&\quad(1,0,1,0,1,0),(0,1,0,1,0,1),(1,0,0,0,0,1),\\&\quad(0,1,1,1,1,0),(1,0,0,1,1,0),(0,1,1,0,0,1),\\&\quad(0,0,1,1,0,0),(1,1,0,0,1,1),(0,0,1,0,1,1),\\&\quad(1,1,0,1,0,0)\}\end{aligned}$$

是 A 的 16 阶子群.

不难看到,以上这些子群中同一子群中的卦都有某种共同的性质.如一阶子群 H_1 只包含一个纯阳的卦;二阶子群 H_2 中包含两个纯阳或纯阴的卦,它们自为复卦,互为旁通;4 阶子群 H_4 包含 H_2,增加了坎、离二卦,失去了纯阳纯阴的性质,保留了纯卦、自复、两两旁通的性质;8 阶子群 H_8 包含 H_4,增加了泰、

否、既济、未济 4 卦，失去了自复、纯卦的属性，原有 4 卦保持自复、纯卦，增加的 4 卦则亦复亦变，仍保留了两两旁通的性质；16 阶子群 H_{16} 包含 H_8，增加了 8 个卦，这 16 卦两两旁通，或自为复卦，或亦复亦变. 易卦集中具有这两种特殊性质的卦均包含在内了.

此外，易卦群 A 还有许多有趣的特殊子群，如

$$\begin{aligned}B_8 &= \{\text{乾，坤，坎，离，巽，兑，艮，震}\}\\ &= \{(1,1,1,1,1,1),(0,0,0,0,0,0),(0,1,0,0,1,0),\\ &\quad (1,0,1,1,0,1),(1,1,0,1,1,0),(0,1,1,0,1,1),\\ &\quad (0,0,1,0,0,1),(1,0,0,1,0,0)\}\end{aligned}$$

是 A 的 8 阶子群，它由 8 纯卦组成.

$$\begin{aligned}C_8 &= \{\text{乾，否，遯，履，讼，同人，无妄，姤}\}\\ &= \{(1,1,1,1,1,1),(0,0,0,1,1,1),(0,0,1,1,1,1),\\ &\quad (1,1,0,1,1,1),(0,1,0,1,1,1),(1,0,1,1,1,1),\\ &\quad (1,0,0,1,1,1),(0,1,1,1,1,1)\}\end{aligned}$$

也是 A 的 8 阶子群，它由所有上卦都是乾卦的卦组成.

例 4.1.4 前面我们是利用 $L=\{0,1\}$ 的二元运算 $\odot$ 来定义易卦群 A 的运算的. 这个运算是按“同性相乘得阳，异性相乘得阴”的法则进行的. 事实上，用另一种方式来定义 $L=\{0,1\}$ 的一个二元运算更显得自然一些. 我们知道，0 是偶数，1 是奇数. 考虑只有奇数、偶数这两个元素的集合 $L'=\{\text{奇，偶}\}$，对于普通加法有

奇数＋奇数＝偶数，奇数＋偶数＝奇数

偶数＋奇数＝奇数，偶数＋偶数＝偶数

L' 对普通加法满足封闭性、结合律，偶数是单位元，奇数的逆元是奇数，偶数的逆元是偶数. 所以，L' 对于普通加法构成一个群. 在数学中称这个群为模 2 加群.

现在我们来定义易卦集 A 的一个新运算. 将 0(阴爻)与偶数对应,1(阳爻)与奇数对应,在每一个爻位上按模 2 加群 L' 的运算法则运算,则易卦集 A 构成另一个群,我们称它为易卦加群.

但是,易卦加群与易卦乘群是同构的. 所谓两个群 G 和 G' 同构,是指两个群

$$G=(a,b,c,\cdots)\quad(\text{运算为“}\otimes\text{”})$$

$$G'=(a',b',c',\cdots)\quad(\text{运算为“}\oplus\text{”})$$

如果在 G 与 G' 的元素之间建立了一一对应

$$a\longrightarrow a',b\longrightarrow b',c\longrightarrow c',\cdots$$

并且对于 G 与 G' 的乘法,它们的积也互相对应,也就是说,

若 $a\longrightarrow a',b\longrightarrow b'$,则 $a\otimes b\longrightarrow a'\oplus b'$.

现在在易卦乘群与易卦加群之间建立一一对应

$x\longrightarrow x$ 的旁通卦 x'

这个对应显然是一一对应. 现在证明:

若 $x\longrightarrow x',y\longrightarrow y'$,则 $x\odot y\longrightarrow x'+y'$

这只要证明 $x\odot y$ 与 $x'+y'$ 在每一个爻位上的爻性都相反就可以了. 实际上,若 x 与 y 在某一爻位上同性,则 x' 与 y' 在这一爻位上也同性. $x\odot y$ 在这一爻位上为 1,$x'+y'$ 在这一爻位上为 0,即 $x\odot y$ 与 $x'+y'$ 在这一爻位上爻性相反. 若 x,y 在某一爻位上异性,则 x' 与 y' 在这一爻位上也异性,$x\odot y$ 在这一爻为 0,$x'+y'$ 在这一爻位为 1,$x\odot y$ 与 $x'+y'$ 在这一爻位上也异性. 所以 $x\odot y$ 与 $x'+y'$ 在每一爻位上都异性,即 $x'+y'$ 是 $x\odot y$ 的旁通卦.

所以,易卦乘群与易卦加群同构. 乘群的单位元是乾卦 $e=(1,1,1,1,1,1)$,加群的单位元则是坤卦 $\theta=(0,0,0,0,0,0)$.

因为易卦乘群与易卦加群同构,以后对于乘群讨论的一切结论,都可以对应地移到加群上,只要把乘群中卦换成它的旁通

卦，把乘群的“乘法”换成加群的“加法”就可以了. 例如

$$H=\{(1,1,1,1,1,1),(0,1,0,0,0,1)\}$$

是易卦乘群的二阶子群，则

$$H'=\{(0,0,0,0,0,0),(1,0,1,1,1,0)\}$$

则是易卦加群的二阶子群.

在例题 4.1.3 中提到的子群 H_2,H_4,H_8,H_{16}，由于它们的元素两两旁通，所以有 $H_2'=H_2,H_4'=H_4,H_8'=H_8,H_{16}'=H_{16}$，它们无论对乘群或加群来说都是子群.

为了使乾卦为单位元，以后本书只讨论易卦乘群，对于易卦加群，只要根据同构对应照搬结论就可以了.

§4.2 易卦群的性质

我们先研究易卦群的子群的结构，在讨论之前，先注意以下诸点是有益的：

(1)易卦群 A 的任一子群都包含 A 的单位元 $e=(1,1,1,1,1,1)$，即乾卦.

(2)易卦群 A 的子群的元素个数只能为 1,2,4,8,16,32,64（以后我们将证明：如果一个有限群 G 有 n 个元素，它的子群 H 有 m 个元素，则 m 必是 n 的因数(定理 4.3.2)).

(3)易卦群 A 的任一元素 a 的逆元即其本身，即 $a\in A$，则 $aa=e$. 由此推出：

a)A 的子集 H 是 A 的子群的充要条件是 H 对 A 的乘法封闭；

b)设 a,b,c 是 A 中的元素，若 $ab=ac$，则有 $b=c$.

定理 4.2.1 设 a 是易卦群 A 中一个异于 e 的元素，则 $W_2=\{e,a\}$ 是 A 的二阶子群.

证明 因为 $ee=e,ea=ae=a,aa=e$，W_2 对 A 的乘法封闭，所以 W_2 是 A

的子群.

定理 4.2.2 设 a,b,c 是易卦群 A 中三个异于 e 且彼此不同的元素，则 A 的子集 $W_4=\{e,a,b,c\}$ 是 A 的子群的充要条件是 $ab=c$.

证明 由 $ab=c$，有 $ac=aab=b$，$bc=acc=a$，根据乘法的可交换性，可得 W_4 的乘法表如下：

$\odot$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

W_4 对 A 的乘法卦闭，故 W_4 是 A 的子群.

反之，设 W_4 是 A 的子群，则 $ab\in W_4$，因此，ab 只能是 e,a,b,c 4 者中的一个.

若 $ab=e$，则推出 $a=b$，与 $a\neq b$ 矛盾；

若 $ab=a$，则推出 $b=e$，与 $b\neq e$ 矛盾；

若 $ab=b$，则推出 $a=e$，与 $a\neq e$ 矛盾.

所以，只能是 $ab=c$.

推论 易卦群 A 的 4 元子集 W_4 是 A 的子群的充要条件是 $W_4=\{e,a,b,ab\}$. 特别地，任何一对旁通卦与乾、坤两卦构成 A 的 4 阶子群.

例如，取 $a=(0,1,1,0,1,0)$，$b=(1,0,0,1,1,1)$，则 $ab=(0,0,0,0,1,0)$. 于是 $W_4=\{(1,1,1,1,1,1),(0,1,1,0,1,0),(1,0,0,1,1,1),(0,0,0,0,1,0)\}$ 是易卦群 A 的一个子群.

定理 4.2.3 设 W_8 是易卦群 A 的 8 阶子群，则一定可由 W_8 中 3 个相互独立的元素通过乘法得出 W_8 的全部元素. 所谓 3 个元素 a,b,c 相互独立，是指 a,b,c 都不是单位元，且其中任何两个元素的乘积都不等于 a,b,c 中某一元素. 即

(1)a,b,c 中没有一个是单位元；

(2)$ab\neq c,ac\neq b,bc\neq a$.

证明 在 W_8 中任取两个不等于 e 的元素 a,b，使 $a\neq b$. W_8 中除 a,b,e 外尚有 5 个不同的元素，一定可找出一个元素 c，使 $ab\neq c$，则 a,b,c 是互相独立的. 事实上，若 $ac=b$，则

$$ab=aac=ec=c$$

矛盾；同理，若 $bc=a$，则

$$ab=bcb=bbc=ec=c$$

矛盾. 即 a,b,c 都不是单位元，且满足 $ab\neq c,ac\neq b,bc\neq a$.

现在，我们来证明，

$$W_8=\{e,a,b,c,ab,ac,bc,abc\}$$

由于 W_8 是 A 的子群，a,b,c 是 W_8 的元素，因为 $aa=e$ 及 W_8 对乘法封闭，可知

$$e,a,b,c,ab,ac,bc,abc$$

都是 W_8 的元素. 要证 W_8 由上述 8 个元素组成，只要证明上述 8 个元素两两不相等即可.

根据 a,b,c 的取法，知 e,a,b,c4 个元素两两互不相等.

若 ab,ac,bc 中有任何一个等于 e，不妨设 $ab=e$，则推出 $a=b$，矛盾. 故 ab,bc,ca 中任何一个不等于 e. 若 ab,bc,ca 中有任何两个相等，例如 $ab=bc$，则推出 $a=c$，矛盾. 所以，ab,bc,ca 中任何两个都不相等. 最后，由 a,b,c 的独立性，ab,bc,ca 也不可能等于 a,b,c 中的任何一个. 这就证明了：e,a,b,c,ab,bc,ca7 个元素中没有任何两个相等.

最后，若 $abc=e$，则 $abc=e=aa$，推出 $bc=a$，矛盾；若 abc 等于 a,b,c 中某一个，例如 $abc=a$，则 $bc=e$，矛盾；若 abc 等于 ab,bc,ca 中某一个，如 $abc=ab$，推出 $c=e$，矛盾. 故 abc 不等于 e,a,b,c,ab,bc,ca 中的任何一个.

这就证明了：e,a,b,c,ab,bc,ca,abc 中没有任何两个相等，因 W_8 中只有 8 个元素，所以，必然有

$$W_8=\{e,a,b,c,ab,bc,ca,abc\}$$

根据定理 4.2.3，我们得到了构造出易卦群 A 的 8 阶子群

的普遍方法.

(1)任取两个不为单位元的元素 $a,b\in A$,如

$$a=(0,1,1,0,1,0)$$

$$b=(1,0,1,1,1,0)$$

(2)在 A 中再取一个不为单位元的元素 c,使 $ab\neq c$. 例如,因 $ab=(0,0,1,0,1,1)$,取

$$c=(1,1,1,0,0,1)$$

即合所求.

(3)算出

$$ab=(0,0,1,0,1,1)$$

$$ac=(0,1,1,1,0,0)$$

$$bc=(1,0,1,0,0,0)$$

$$abc=(0,0,1,1,0,1)$$

由上述可知,

$$W_8=\{e,a,b,c,ab,ac,bc,abc\}$$

是 A 的一个 8 阶子群.

定理 4.2.4 一个易卦群 A 的 8 阶子群 W_8 恰好有 7 个不同的 4 阶子群.

证明 在 W_8 中除单位元 e 外其余的 7 个元素中任取两个元素 a,b,使 $a\neq b$. 若 $ab=c$,则由定理 4.2.2 知,$\{e,a,b,c\}$ 是一个 4 阶子群. 因为 7 元素中每次取两个的组合有 $C_7^2=21$ 种,故可决定 21 个子群,但若 $ab=c$,且 $a\neq b$,则由 a 和 b,或 b 和 c,或 c 和 a 这三个不同的组合都只能产生同一个子群. 所以恰有 $21/3=7$ 个不同的 4 阶子群.

下面我们介绍一个把易卦集 A 的 $2^m(m=0,1,2,3,4,5)$ 元子群扩充为 2^{m+1} 元子群的方法.

定义 4.2.1 易卦群中若干个不是单位元 e 且互不相同的元素,如果其中任何一个元素都不能表成其余元素中某几个的

乘积，则称这些卦是相互独立的.

现在我们看如何通过 A 的 8 阶子群构造 A 的 16 阶子群.

设 a,b,c 是三个相互独立的元素. 由它们决定的 8 阶子群的元素是

$$e,a,b,c,ab,bc,ca,abc \qquad (*)$$

取一个不等于(*)中任一元素的 A 中元素 d，则易证 a,b,c,d 是相互独立的. 用 d 乘(*)中的元素，又得 8 个元素：

$$ed,ad,bd,cd,abd,bcd,cad,abcd \qquad (**)$$

显然，(**)中任何两个元素都不能相等. 事实上，若有 $xd=yd$，x,y 是(*)中的元素，两边乘以 d，即得 $x=y$，矛盾. 同理，(**)中任一元素也不可能等于(*)中的任何一个元素. 事实上，若有 $x=yd$，x,y 是(*)中的元素. 若 $x=y$，推出 $d=e$，矛盾. 若 $x\neq y$，两边乘以 y 推出 $xy=d$，与 d 的取法矛盾. 故(*)与(**)中的所有元素(共 16 个)互不相同. 又(*)与(**)中 16 个元素放在一起，显然对 A 的乘法封闭，所以这 16 个元素所成的子集构成 A 的 16 个子群.

用同样的方法可以继续得到 A 的 32 阶子群和 64 阶子群. 于是，我们有下面的

定理 4.2.5 易卦群 A 中 k 个($1\leqslant k\leqslant 6$)相互独立的元素作一切可能的乘积组成 A 的一个 2^k 阶子群. 我们称这个子群为这 k 个元素的生成群.

例题 4.2.1 在第三章例题 3.3.2 中，我们谈到了东汉易学家荀爽等认为：易卦集 A 是由乾、坤两卦生“十辟卦”，再由“十辟卦”生其余 52 卦，从而得到 64 卦. 在例题 3.3.2 中我们指出了不能利用乾、坤两卦及“十辟卦”这一向量组的生成空间“生”出易 64 卦. 但是，却不难证明：在乾、坤和“十辟卦”这 12 卦中，包含了两组“6 个互相独立的元素”，因而它们的生成群可以

“生”出易 64 卦.

乾、坤和“十辟卦”是：

坤＝(0,0,0,0,0,0)，乾＝(1,1,1,1,1,1)

复＝(1,0,0,0,0,0)，剥＝(0,0,0,0,0,1)

临＝(1,1,0,0,0,0)，观＝(0,0,0,0,1,1)

泰＝(1,1,1,0,0,0)，否＝(0,0,0,1,1,1)

大壮＝(1,1,1,1,0,0)，遯＝(0,0,1,1,1,1)

夬＝(1,1,1,1,1,0)，姤＝(0,1,1,1,1,1)

我们来检验：坤、复、临、泰、大壮、夬这 6 个卦相互独立.

证明　(1)由复、临、泰、大壮、夬 5 卦中任取若干个相乘，所得之积的第一爻位都为 1，所以，坤卦不能由其余 5 卦作乘积得到.

(2)由临、泰、大壮、夬 4 卦中任取若干个相乘，所得之积的第一、第二两爻位上都为 1，不能得到复卦. 若再乘以坤卦，则第一爻位变为 0，仍不能得到复卦，故复卦不能用其余 5 卦作乘积得出.

(3)由泰、大壮、夬 3 卦取若干个相乘，其积的第一、第二、第三爻位都为 1，不能得到临卦；若再乘以坤或复，则第一爻或第二爻变为 0，也不能得到临卦；若同乘坤、复，第一爻为 0，仍不能得到临卦，故临卦不能由其余 5 卦作乘积得出.

(4)大壮、夬 2 卦中每一个或它们的积前 4 爻都为 1，而坤、复、临 3 卦中任取若干个相乘，其积在前 3 个爻位中总至少有一个为 0. 因此，泰卦不能由其余 5 卦作乘积得出.

(5)坤、复、临、泰 4 卦中任取若干个相乘前 4 爻中总至少有一个为 0，它们与夬卦相乘与否都不能得到大壮卦.

(6)最后，在坤、复、临、泰、大壮中任取若干个卦相乘，前 5 个爻位中至少有一个为 0，故夬卦也不能由其余 5 卦作乘积得

出.

这就证明了:坤、复、临、泰、大壮、夬 6 卦相互独立,它们的生成群即为易卦群 A.

完全类似地可以证明:坤、剥、观、否、遯、姤 6 卦也相互独立,它们的生成群也是易卦群 A.

§4.3 陪集与划分

在第二章中我们谈到了集合的划分,它依赖于一个关系.在这一节里我们要介绍作为群的集合的划分,它与群的一个子集有关.

定义 4.3.1 设 H 是交换群 G 的一个子群,x 是 G 中一个固定的元素.对所有的 $h\in H$,作乘积 hx,它们所成的集合称为 H 的傍系或陪集,记作 x_H.

例如,易卦群 A 的一个子群 H

$$H=\{(1,1,1,1,1,1),(0,0,0,0,0,0),$$
$$(0,1,0,0,1,0),(1,0,1,1,0,1)\}$$

任取 A 的元素 $x=(0,1,0,1,0,1)$,则

$$xh_1=(0,1,0,1,0,1)(1,1,1,1,1,1)=(0,1,0,1,0,1)$$
$$xh_2=(0,1,0,1,0,1)(0,0,0,0,0,0)=(1,0,1,0,1,0)$$
$$xh_3=(0,1,0,1,0,1)(0,1,0,0,1,0)=(1,1,1,0,0,0)$$
$$xh_4=(0,1,0,1,0,1)(1,0,1,1,0,1)=(0,0,0,1,1,1)$$

所以,H 的陪集 x_H 是

$$x_H=\{(0,1,0,1,0,1),(1,0,1,0,1,0),$$
$$(1,1,1,0,0,0),(0,0,0,1,1,1)\}$$

x_H 与 H 的元素个数相同.一般地,有下面的

定理 4.3.1 若 G 是一个有限交换群,H 是它的一个子群,则 H 的任何一个陪集 x_H 与 H 的元素个数相同.

证明 设 H 共有 n 个元素，

$$H=\{h_1,h_2,\cdots,h_n\}$$

则 $$x_H=\{xh_1,xh_2,\cdots,xh_n\}$$

若 x_H 中有两个元素相等，例如 $xh_i=xh_j(h_i\neq h_j)$，将这个等式两边乘以 x^{-1} 后得 $(x^{-1}x)h_i=(x^{-1}x)h_j$，从而 $h_i=h_j$，与 $h_i\neq h_j$ 矛盾. 所以 x_H 中的 n 个元素都互不相同，即 x_H 也有 n 个元素.

定义 4.3.2 有限交换群 G 的子群 H 的所有不同陪集的个数，叫做 H 在 G 中的指数.

定理 4.3.2 设群 G 有 n 个元素，它的子群 H 有 m 个元素，H 在 G 中的指数为 r，则

$$n=mr$$

证明 我们先证明，H 在 G 内的任何两个不同的陪集 x_H，y_H 没有公共元素. 事实上，设 $x_H\neq y_H$，且有 $z\in x_H\cap y_H$. 那么，必有

$$z=xh_1=yh_2\quad(h_1,h_2\in H)$$

于是，$xh_1^{-1}=x=yh_2h_1^{-1}$. 因 $h_1\in H$，所以 $h_1^{-1}\in H$，从而 $h_2h_1^{-1}=h'\in H$. 于是 $x=yh'\in y_H$. 对 x_H 中的任一元 xh，有 $xh=yh'h=yh''\in y_H$，所以 $x_H\subseteq y_H$. 同理可证，$y_H\subseteq x_H$，即得 $x_H=y_H$. 这个矛盾证明了 $x_H\cap y_H=\varnothing$.

今 H 在 G 中有 r 个陪集，每一个陪集中有 m 个元素，而 r 个陪集中任两个都没有公共元素，所以这 r 个陪集的并集共有 mr 个元素. 群 G 恰好是 H 的所有陪集的并集，它有 n 个元素. 这就证明了 $n=mr$.

定理 4.3.3 交换群 G 对于它的一个子群 H 的全部陪集所成的集合是 G 的一个划分.

证明 设 G 对于 H 的陪集是

$$x_{1H},x_{2H},\cdots,x_{rH}$$

因为这 r 个陪集的并集就是群 G，且它们每一个都不是空集(因至少有 $x_i\in x_{iH}$，$i=1,2,\cdots,r$)，且每两个无公共元素，满足划分的三个条件：

(1)每个子集 x_{iH} 都不是空集；

(2)$x_{1H}\cup x_{2H}\cup\cdots\cup x_{rH}=G$；

(3)当 $i\neq j$ 时 $x_{iH}\cap x_{jH}=\varnothing(1\leqslant i<j\leqslant r)$.

所以，集合 $\mathscr{F}=\{x_{1H},x_{2H},\cdots,x_{rH}\}$ 是群 G 的一个划分.

定义 4.3.3 设交换群 G 的子群 H 的所有陪集是 $x_{1H},x_{2H},\cdots,x_{rH}$，在 $x_{1H},x_{2H},\cdots,x_{rH}$ 的每一个中分别取一个元素，记作 $a_1,a_2,\cdots,a_r$，则称元素组 $a_1,a_2,\cdots,a_r$ 为 H 的一个完系.

今取交换群 G 的一个子群 $H=\{b_1,b_2,\cdots,b_m\}$，又取 H 的一个完系 $\{a_1,a_2,\cdots,a_r\}$. 利用 G 的乘法作乘法表：

$\odot$	b_1	b_2	$\cdots$	b_{m-1}	b_m
a_1	a_1b_1	a_1b_2	$\cdots$	a_1b_{m-1}	a_1b_m
a_2	a_2b_1	a_2b_2	$\cdots$	a_2b_{m-1}	a_2b_m
$\vdots$	$\cdots$				
a_{r-1}	$a_{r-1}b_1$	$a_{r-1}b_2$	$\cdots$	$a_{r-1}b_{m-1}$	$a_{r-1}b_m$
a_r	a_rb_1	a_rb_2	$\cdots$	a_rb_{m-1}	a_rb_m

(1)

则乘法表(1)中第一行的 m 个元素构成 H 的陪集 a_{1H}，第二行的 m 个元素构成 H 的陪集 $a_{2H},\cdots$，第 r 行的 m 个元素构成 H 的陪集 a_{rH}. 所以，表(1)的横行作成群 G 的一个划分. 表(1)中的 mr 个积恰好给出群 G 的 $n=mr$ 个元素. 我们自然会问：r 个什么样的元素可以构成子群 H 的一个完系呢？对于易卦群 A，我们有下面的

定理 4.3.4 设易卦群 A 的子群 H 有 m 个元素

$$H=\{b_1,b_2,\cdots,b_m\}$$

令 $r=64/m$，A 中 r 个不同元素

$$a_1,a_2,\cdots,a_r$$

是 H 的一个完系的充要条件是 $a_1,a_2,\cdots,a_r$ 中任何两个不同元素的乘积都不属于 H.

证明 条件的必要性. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_r$ 是 H 的一个完系，若有 $a_i,a_j,(a_i\neq a_j)$，使

$$a_ia_j=b_k\quad(1\leqslant i<j\leqslant r,b_k\in H,1\leqslant k\leqslant m)$$

则　　$a_i=a_i(a_ja_j)=b_ka_j=a_jb_k\in a_jH$

但 $a_i\in a_iH$，推出 $a_iH\cap a_jH\neq\varnothing$，矛盾.

条件的充分性. 要证 $a_1,a_2,\cdots,a_r$ 为 H 的完系，只要证乘法表(1)中的积没有两个相等即可. 若表(1)中有两项不同的乘积相等，设为

$$a_ib_k=a_jb_l$$

若 $i=j$，则 $a_i=a_j$，推出 $b_k=b_l$，a_ib_k 与 a_jb_l 是同一项；同理，若 $k=l$，也有 a_ib_k 与 a_jb_l 是同一项. 与假设 a_ib_k 与 a_jb_l 是两项不同的乘积矛盾. 所以，$i\neq j$，$k\neq l$. 于是

$$a_ia_kb_kb_l=a_ia_jb_lb_l$$

因 H 为群，$b_k,b_l\in H$，所以 $b_kb_l=b_t\in H$，于是有

$$a_ia_j=b_t\in H\quad(i\neq j)$$

与条件矛盾. 所以表(1)中任何两项不同的乘积不相等.

例 4.3.1　前人对 64 卦的排列有多种不同方式，有几种排列方法是把易卦集的 64 卦排列成一个 8×8 的方阵，即将 64 卦排成 8 行，每行 8 个卦. 如“汉帛书本《周易》卦序排列图”、“伏羲卦序方图”、“京房卦变八宫卦次图”等都是把 64 卦排成 8×8 的方阵，如下页的图 4.3.1 是“京房卦变八宫卦次图”. 对于这个卦图的来历，人们都觉得很神秘. 但注意到，这个卦图的第一行是 8 纯卦，作成易卦群 A 的一个子群 H

$$H=\{\text{坤},\text{乾},\text{兑},\text{艮},\text{离},\text{坎},\text{巽},\text{震}\}$$

第二列的 8 个元素

$$\text{乾}=(1,1,1,1,1,1)$$
$$\text{姤}=(0,1,1,1,1,1)$$
$$\text{遁}=(0,0,1,1,1,1)$$
$$\text{否}=(0,0,0,1,1,1)$$
$$\text{观}=(0,0,0,0,1,1)$$
$$\text{剥}=(0,0,0,0,0,1)$$
$$\text{晋}=(0,0,0,1,0,1)$$

	太阴第一	太阳第二	少阴第三	少阳第四	仲阴第五	仲阳第六	孟阴第七	孟阳第八
本宫	坤䷁	乾䷀	兑䷹	艮䷳	离䷝	坎䷜	巽䷸	震䷲
一世	复䷗	姤䷫	困䷮	贲䷕	旅䷷	节䷻	小畜䷈	豫䷏
二世	临䷒	遁䷠	萃䷬	大畜䷙	鼎䷱	屯䷂	家人䷤	解䷧
三世	泰䷊	否䷋	咸䷞	损䷨	未济䷿	既济䷾	益䷩	恒䷟
四世	大壮䷡	观䷓	蹇䷦	睽䷥	蒙䷃	革䷰	无妄䷘	升䷭
五世	夬䷪	剥䷖	谦䷎	履䷉	涣䷺	丰䷶	噬嗑䷔	井䷯
游魂	需䷄	晋䷢	小过䷽	中孚䷼	讼䷅	明夷䷣	颐䷚	大过䷛
归魂	比䷇	大有䷍	归妹䷵	渐䷴	同人䷌	师䷆	蛊䷑	随䷐

图 1.3.1

是 H 的一个完系(不难验证,这 8 个卦中任何两个不同卦的乘积都不是 H 中的纯卦).因此,如果我们以 H 的元素为横行,它的完系为纵列,作乘法表(1),就得到京房卦图.

在 § 4.2 中,我们叙述了利用易卦群 A 中相互独立的元素扩充其子群的方法,其方法与构造子群的陪集有密切的关系.我们不难证明下述定理.

定理 4.3.5 设 H 是易卦群 A 的一个 m 阶子群,x 是 A 中一个不属于 H 的元素,则 H 与其陪集 x_H 的并集是一个 A 的 $2m$ 阶子群.

证明 设 A 的子群 H 与 x_H 分别为

$$H=\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$$

$$xH=\{b_1,b_2,\cdots,b_m\}$$

其中 $b_i=xa_i(i=1,2,\cdots,m)$. 则

$$H\cup xH=\{a_1,\cdots,a_m,b_1,\cdots,b_m\}$$

先证 $H\cup xH$ 为 A 的子群. 这只要证 $H\cup xH$ 对乘法封闭即可. 任取 $\alpha,\beta\in H\cup xH$. 分三种情况讨论：

(1)若 $\alpha=a_i,\beta=a_j$，则 $\alpha\beta=a_ia_j\in H$，从而 $\alpha\beta\in H\cup xH$.

(2)若 $\alpha=b_i,\beta=b_j$，则 $\alpha=xa_i,\beta=xa_j$，故

$$\alpha\beta=(xa_i)(xa_j)=(xx)(a_ia_j)=a_ia_j\in H$$

仍有 $\alpha\beta\in H\cup xH$.

(3)若 $\alpha=a_i,\beta=b_j$，则

$$\alpha\beta=a_ib_j=a_i(xa_j)=x(a_ia_j)$$

因 $a_i,a_j\in H,a_ia_j\in H,x(a_ia_j)\in xH$，亦有 $\alpha\beta\in H\cup xH$.

因此，$H\cup xH$ 对于乘法封闭，故为 A 的子群.

其次证明 $H\cup xH$ 有 $2m$ 个元素，这只要证明 $H\cup xH$ 中没有两个元素相等即可. 因 H 中的元素互不相同，xH 中的元素也互不相同，故只须证明 $a_i\neq b_j$. 若有 $a_i=b_j$，则 $a_i=xa_j$. 两边同乘 a_j，得出 $x=a_ia_j\in H$，与 $x\notin H$ 的条件矛盾. 故 $H\cup xH$ 恰有 $2m$ 个元素，即 $H\cup xH$ 是 A 的 $2m$ 阶子群.

例 4.3.2 下页图 4.3.2 是在长沙马王堆出土的汉帛书《周易》对 64 卦的排列图.

图中第一横行是 8 个纯卦所成之群

$$H=\{乾,艮,坎,震,坤,兑,离,巽\}$$

第一纵列也是一个上卦同为乾卦的 A 的 8 阶子群；

$$B=\{乾,否,遯,履,讼,同人,无妄,姤\}$$

因为 B 是一个群，对于乘法封闭，故 B 中任两个不同元素的乘积仍在 B 中且不等于单位元，即乾卦，故不可能成为 H 中的卦，因而是 H 的一个完系. 今取 H 的元素为横行，B 的元素为纵列，作乘法表(1)就得到易卦群 A 关于 H 的一个划分. 将乘法表(1)

	乾宫第一	艮宫第二	坎宫第三	震宫第四	坤宫第五	兑宫第六	离宫第七	巽宫第八
第一卦	乾䷀	艮䷳	坎䷜	震䷲	坤䷁	兑䷹	离䷝	巽䷸
第二卦	否䷋	大畜䷙	需䷄	大壮䷡	泰䷊	夬䷪	大有䷍	小畜䷈
第三卦	遁䷠	剥䷖	比䷇	豫䷏	谦䷎	萃䷬	晋䷢	观䷓
第四卦	履䷉	损䷨	蹇䷦	小过䷽	临䷒	咸䷞	旅䷷	渐䷴
第五卦	讼䷅	蒙䷃	节䷻	归妹䷵	师䷆	困䷮	睽䷥	中孚䷼
第六卦	同人䷌	贲䷕	既济䷾	解䷧	明夷䷣	革䷰	未济䷿	涣䷺
第七卦	无妄䷘	颐䷚	屯䷂	丰䷶	复䷗	随䷐	噬嗑䷔	家人䷤
第八卦	姤䷫	蛊䷑	井䷯	恒䷟	升䷭	大过䷛	鼎䷱	益䷩

图 4.3.2

中各纵列元素适当调整即得帛书卦序方图.

另一方面,我们看如何通过易卦群 A 的子群 B 逐步扩充得到易卦群.

对子群 B,取坤卦 $x=(0,0,0,0,0,0)$,作 x_B,则不难计算出 x_B 就是第 5 宫的卦. 于是

$$B\cup x_B=\{\text{第 1 宫的卦}\}\cup\{\text{第 5 宫的卦}\}$$

记 $C=B\cup x_B$,则 C 是 A 的一个 16 阶子群.

再取 $y=$坎卦$=(0,1,0,0,1,0)$,则不难发现,C 的陪集 y_C 就是第 3 宫与第 7 宫中的卦. 于是

$$C\cup y_C=(B\cup x_B)\cup y_C$$
$$=(\{第1宫\}\cup\{第5宫\})\cup(\{第3宫\}\cup\{第7宫\})$$
$$=\{第1宫\}\cup\{第3宫\}\cup\{第5宫\}\cup\{第7宫\}$$

记 $C\cup y_C=D$，则 D 是 A 的 32 阶子群. 再取艮卦$=z=(0,0,1,0,0,1)$，作陪集 z_D，即可看到 z_D 就是第 2 宫、第 4 宫、第 6 宫、第 8 宫中的 32 个元素. 即得

$$D\cup z_D=A$$

这是一个很有趣的排序，如果我们用 $K_1,K_2,\cdots,K_8$ 分别代表第 1 宫，第 2 宫，…，第 8 宫中的卦所成之集，则有

K_1 K_2 K_3 K_4 K_5 K_6 K_7 K_8

K_1 K_3 K_5 K_7（取奇数位）

K_1 K_5（取奇数位）

K_1（取奇数位）

上图揭示在帛书《周易》卦序图的 8 宫中，取奇数位上的 4 宫，得一 32 阶子群；再取奇数位上的 2 宫，得一 16 阶子群；再取奇数位上的 1 宫，得一 8 阶子群. 把这套程序倒过来，就得到上面的从第 1 宫的 8 阶子群逐步扩张的过程.

第五章　周易与数论

二与四，同功而异位.

——《周易·系辞》

在第一章中我们曾经谈到秦九韶的《蓍卦发微》和《周易·系辞》中“大衍之数”都涉及到同余的概念. 同余概念是数论中最基本的概念之一. 传统易学的内容是所谓象、数、理、占. 因此，《周易》中涉及数论的地方也特别多，如天地数、筮数、河图数等. 不过，其中的数大都比较简单. 本章只介绍同余式的概念.

整数有许多性质，仍保留在它用某一整数去除以后所得的余数中. 例如 99 能被 3 整除，当 99 用 18 去除后所得的余数 9，仍能被 3 整除. 事实上，在现实生活中，对某些整数，我们关心的往往并不是这个整数本身，而是它用某一整数所除后的余数. 例如从武汉到北京的火车 22 点开出，经过 18 小时后到达北京，人们说火车到达北京的时间，不是说 $22+18=40$ 点，而是说次日 16 点. 因为 $40=24\times1+16$，40 用 24 除的余数是 16. 它们的位置不同，表达的功能却一样.

§5.1　同余的基本知识

定义 5.1.1　设 m 是一个给定的正整数，如果两个整数 a

和 b 用 m 除所得的余数相同，那么称 a 与 b 模 m 同余. 记作 $a\equiv b(\mathrm{mod}m)$.

例如 $17\equiv 8(\mathrm{mod}3)$，$25\equiv 0(\mathrm{mod}5)$等等.

同余的概念也可用下面两种方式之一来定义.

定义 5.1.1′ 如果 a 与 b 的差 $a-b$ 能被 m 整除，即 $m|(a-b)$，则称 a 与 b 模 m 同余.

定义 5.1.1″ 如果 $a=km+b$，k 为一整数，则称 a 与 b 模 m 同余.

三种定义是等价的，以后我们不加区分地任意引用其中一种作为同余的定义.

定理 5.1.1 同余关系是一种等价关系，即它具有性质：

(1)自反性：$a\equiv a(\mathrm{mod}m)$；

(2)对称性：若 $a\equiv b(\mathrm{mod}m)$，则 $b\equiv a(\mathrm{mod}m)$；

(3)传递性：若 $a\equiv b(\mathrm{mod}m)$，$b\equiv c(\mathrm{mod}m)$，则 $a\equiv c(\mathrm{mod}m)$.

定义 5.1.2 把全体整数按模 m 的同余关系把整数集划分为等价类，这些等价类称为模 m 的剩余类.

例如，取模 $m=4$，则有

$$K_0=\{\cdots,-8,-4,0,4,8,\cdots\}$$

$$K_1=\{\cdots,-7,-3,1,5,9,\cdots\}$$

$$K_2=\{\cdots,-6,-2,2,6,10,\cdots\}$$

$$K_3=\{\cdots,-5,-1,3,7,11,\cdots\}$$

很明显，在同一个剩余类中的任何两个数都模 m 同余；不在同一个剩余类的任何两个数都模 m 不同余.

定义 5.1.3 在模 m 的每一个剩余系类中取一个数，所得的 m 元数组称为模 m 的一个完全剩余系，简称完系.

例如，对模 4 而言，$\{0,1,2,3\}$是一个完系，$\{-8,9,14,27\}$也是一个完系，等等.

模 m 的完系有无限多个，但最常用的有两个：

(1)非负最小完系：$0,1,2,\cdots,m-1$；

(2)绝对值最小完系：分两种情况：

当 m 为奇数时，设 $m=2k+1$，为

$$-k,-(k-1),\cdots,-1,0,1,\cdots,k-1,k$$

当 m 为偶数时，设 $m=2k$，为

$$-k,-(k-1),\cdots,-1,0,1,\cdots,k-1$$

或

$$-(k-1),-(k-2),\cdots,-1,0,1,\cdots,k-1,k$$

定理 5.1.2 m 个数 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 是模 m 的完全剩余系的充要条件是它们对模 m 两两不同余. 即当 $i\neq j$ 时，

$$a_i\not\equiv a_j(\mathrm{mod}m)\quad(1\leqslant i,j\leqslant m)$$

证明 若 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 是模 m 的完系，则它们取自不同的剩余类，任何两个不在同一剩余类中的数模 m 不同余，所以条件是必要的.

反之，若 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 对模 m 两两不同余，则其中任何两个都不可能在同一个剩余类中. 今有 m 个数，m 个剩余类，故必每个剩余类中恰有 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 中一个数，即 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 是一个完系. 所以条件也是充分的.

关于同余式的运算，有许多和数的普通运算相似的定理.

定理 5.1.3 设 $a\equiv b(\mathrm{mod}m)$，$c\equiv d(\mathrm{mod}m)$，则

(1)$a+c\equiv(b+d)(\mathrm{mod}m)$

(2)$(a-c)\equiv(b-d)(\mathrm{mod}m)$

(3)$ac\equiv bd(\mathrm{mod}m)$

(4)若 $ac\equiv bc(\mathrm{mod}m)$，且 $(c,m)=1$，则 $a\equiv b(\mathrm{mod}m)$(符号 $(c,m)=1$ 表示 c 与 m 互素).

证明 因 $a\equiv b(\mathrm{mod}m)$，$c\equiv d(\mathrm{mod}m)$，故可设 $a=b+xm$，$c=d+ym$(x,y 为整数)，于是

$$a\pm c=(b\pm d)+(x\pm y)m=(b\pm d)+mt\quad(t\text{ 为整数})$$

这意味着

$$(a\pm c)\equiv(b\pm d)(\mathrm{mod}m)$$

又　　$ac=bd+(by+dx+mxy)m=bd+mt$　(t 为整数)

所以

$$ac\equiv bd(\mathrm{mod}m)$$

又由 $ac\equiv bc(\mathrm{mod}m)$，知 $m|(ac-bc)$，即 $m|c(a-b)$，因为$(m,c)=1$，所以 $m|(a-b)$，这意味着 $a\equiv b(\mathrm{mod}m)$.

推论　若 $a_i\equiv b_i(\mathrm{mod}m)(i=0,1,2,\cdots,n)$，则

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0\equiv b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_0(\mathrm{mod}m)$$

定理 5.1.4　若 $a\equiv b(\mathrm{mod}m)$，则

(1)设 $k>0$，有

$$ak\equiv bk(\mathrm{mod}km)$$

(2)d 是 a,b 及 m 的任一公因数，则

$$a/d\equiv b/d(\mathrm{mod}m/d)$$

(3)$d>0,d|m$，则 $a\equiv b(\mathrm{mod}d)$.

证明　(1)由 $a\equiv b(\mathrm{mod}m)$，有 $a=b+mt$，两边同乘以 k，即得 $ak=bk+(mk)t$，因 t 为整数，即知

$$ak\equiv bk(\mathrm{mod}mk)$$

(2)由 $a\equiv b(\mathrm{mod}m)$，有 $a=b+mt$. 两边同除以 d，得 $a/d=b/d+(m/d)t$，因 $a/d,b/d,m/d$ 均为整数，即得

$$a/d\equiv b/d(\mathrm{mod}m/d)$$

(3)因 $d|m$，可设 $m=dn,n$ 为整数. 由 $a\equiv b(\mathrm{mod}m)$，有 $a=b+mt=b+d(nt)$，因 nt 为一整数，故

$$a\equiv b(\mathrm{mod}d)$$

例题 5.1.1　《周易·系辞》中记载了古人揲蓍成卦的法则：取 50 根蓍草，弃置 1 策不用，实用 49 策. 将其分为两部分，从一部分中先拿出 1 策，称为“挂一”，然后将两部分对模 4 求余数(揲之以四). 设余数分别为 r_1 和 r_2. 不同的是，这里的余数与通常除法的余数略有不同. 当余数为 0 时，不取余数为 0 而取余数为 4，即 $1\leqslant r_1,r_2\leqslant 4$. 将余数 r_1 和 r_2 策及“挂一”的 1 策一并

去掉，共去掉 r_1+r_2+1 策，剩下 $49-(r_1+r_2+1)$ 策，称为一变. 重复上述过程三次，称为三变，经过三变之后：

第一变后剩下 44 或 40 策；

第二变后剩下 40、36 或 32 策；

第三变后剩下 36、32、28 或 24 策.

前人对《系辞》筮法的许多数据，觉得很神秘，有种种猜测. 利用同余理论，可以对若干问题作出明确的解释.

(1)在三变过程中，每一变后剩下的策数均为 4 的倍数，即每一变后的策数都属于模 4 的剩余类 K_0 中. 这是偶然的现象还是普遍的规律呢？它是以下面的定理为保证的，因而是必然的.

定理 5.1.5 设 R 为正整数，令

$$R=R_1+R_2 \quad (R_1>1, R_2>0)$$

若 $R_1-1\equiv r_1(\mathrm{mod}m)$，$R_2\equiv r_2(\mathrm{mod}m)(1\leqslant r_1, r_2\leqslant m)$，则

$$R-(r_1+r_2+1)\equiv 0(\mathrm{mod}m)$$

证明 因为 $R=R_1+R_2$，所以

$$R-1\equiv(R_1-1)+R_2\equiv(r_1+r_2)(\mathrm{mod}m)$$

即
$$R-(r_1+r_2+1)\equiv 0(\mathrm{mod}m)$$

因为揲蓍开始有 R 策，“分而为二”后得 $R=R_1+R_2$，在 R_1 中挂一之后变为 R_1-1，R_1-1 与 R_2“揲之以 m”的余策为 r_1 和 r_2，“归奇于扐”的策数为 r_1+r_2+1，剩下的策数为 $R-(r_1+r_2+1)$. 由这个定理，$R-(r_1+r_2+1)\equiv 0(\mathrm{mod}m)$，即 $R-(r_1+r_2+1)$ 永为 m 的倍数.

(2)根据筮法，最后剩下的策数必为 36、32、28 或 24 这 4 个数之一. 用 4 除后就得到 9，8，7，6 等 4 个数之一，称为筮数. 人们会问：是否开始一定要用 49 策，才能保证得到 9，8，7，6 这 4 个筮数呢？或者说，是否从别的什么数开始，也能得到 4 个连续的整数呢？如有人认为筮仪所用策数不必限于 50，不“挂一”也

行，挂几不挂几都无所谓，不一定非“揲四”不可，也可以“揲”别的数，最后所得筮数都将是 4 个连续的整数. 其实，事实并非如此.

例如，如果我们开始用 46 策，按照《周易·系辞》所讲的方法进行分揲，则最后只能得到 3 个筮数(详见下节的“筮法定理”).

至于按照《系辞》的揲法，即“分二”、“挂一”、“揲四”、“三变”、“归奇”等过程，在什么情况下才能保证得到 9,8,7,6 这 4 个筮数呢?

设开始用 R 策，并设 $R=4k+r(0\leqslant r\leqslant 3)$，在进行一变时，先“分二”，

$$R=4k+r=R_1+R_2$$

再“挂一”，

$$R-1=4k+(r-1)=(R_1-1)+R_2$$

分别“揲四”得，

$$R_1-1\equiv r_1(\mathrm{mod}4)\quad(1\leqslant r_1\leqslant 4)$$

$$R_2\equiv r_2(\mathrm{mod}4)\quad(1\leqslant r_2\leqslant 4)$$

1)当 $r=0$ 时，有

$$r_1+r_2\equiv(R_1-1)+R_2\equiv -1\equiv 3(\mathrm{mod}4)$$

因为 $2\leqslant r_1+r_2\leqslant 8$，推出 $r_1+r_2=3$ 或 7，$r_1+r_2+1=4$ 或 8，故“归奇”之后，剩下

$$R-(r_1+r_2+1)=4(k-\theta_1)\quad(\theta_1=1\text{ 或 }2)$$

2)当 $r=1$ 时，有

$$r_1+r_2\equiv(R_1-1)+R_2\equiv 0(\mathrm{mod}4)$$

因 $2\leqslant r_1+r_2\leqslant 8$，推出 $r_1+r_2=4$ 或 8，$r_1+r_2+1=5$ 或 9. 故“归奇”之后，剩下

$$R-(r_1+r_2+1)=4(k-\theta_1)\quad(\theta_1=1\text{ 或 }2)$$

3)当 $r=2$ 时,有

$$r_1+r_2\equiv(R_1-1)+R_2\equiv1(\mathrm{mod}4)$$

因为 $2\leqslant r_1+r_2\leqslant8$,故 $r_1+r_2=5$,$r_1+r_2+1=6$

所以

$$R-(r_1+r_2+1)=R-6=4(k-1)$$

4)当 $r=3$ 时,有

$$r_1+r_2\equiv(R_1-1)+R_2\equiv2(\mathrm{mod}4)$$

因为 $2\leqslant r_1+r_2\leqslant8$,故 $r_1+r_2=6$,$r_1+r_2+1=7$,这时有

$$R-(r_1+r_2+1)=R-7=4(k-1)$$

综合上述分析可知,若 $R=4k+r$,当 $r\geqslant2$ 时,一变之后剩下的策数只有一种情况,即

$$R-(r_1+r_2+1)=4(k-1)$$

若 $0\leqslant r\leqslant1$,一变之后剩下的策数有两种情况,即

$$R-(r_1+r_2+1)=4(k-\theta_1)\quad(\theta_1=1\text{ 或 }2)$$

因此,三变之后,剩下的策数为

$$R_3=\begin{cases}4(k-\theta_1-\theta_2-\theta_3) & (\theta_1,\theta_2,\theta_3=1\text{ 或 }2,\text{当 }0\leqslant r\leqslant1)\\ 4(k-1-\theta_2-\theta_3) & (\theta_2,\theta_3=1\text{ 或 }2,\text{当 }2\leqslant r\leqslant3)\end{cases}\tag{1}$$

用 4 除后得筮数为

$$x=\begin{cases}k-(\theta_1+\theta_2+\theta_3)=k-\theta & (3\leqslant\theta\leqslant6,\text{当 }0\leqslant r\leqslant1)\\ k-(1+\theta_2+\theta_3)=k-\theta & (2\leqslant r\leqslant3,\text{当 }2\leqslant r\leqslant3)\end{cases}\tag{2}$$

因此,对《系辞》筮法,开始用 49 策,$49=4\times12+1$,$r=1$,$k=12$,故得 4 个连续整数:

$$12-\theta,3\leqslant\theta\leqslant6,\text{即 }9、8、7、6$$

如果开始用 48 策,$48=4\times12+0$,仍可得 9、8、7、6 四个连续整数.

但如用 46 策,因 $46=4\times11+2$,$r=2$,$k=11$,情况就完全不同了,所得筮数为

$$11-\theta,3\leqslant\theta\leqslant5,\text{即 }8、7、6$$

可见最后得什么筮数与开始所用策数 R 有关. 在下节"筮法定理"中将彻底解决这个问题.

(3)《系辞》筮法将三变以后的余策数除以 4 得到 4 个筮数 9,8,7,6,分别称为老阴、少阳、少阴、老阳. 这是汉、唐及大部分易学家采用的方法,称之为"过揲法". 宋儒朱熹对此法则不以为然,另创"挂扐法",以求老阴、少阳、少阴、老阳之数. 所谓"挂扐法"系指根据"归奇于扐"时去掉的策数来计算. 其具体方法是:因第一变去掉的策数不是 5 就是 9,第二、三变去掉的策数不是 4 就是 8,5 与 4 只包含一个 4,朱熹称之为"少";8 与 9 包含两个 4,朱熹称之为"多". 因此,挂扐之数非多即少,经过三变,不外乎 4 种情况:

三次皆多——称为老阴

两多一少——称为少阳

两少一多——称为少阴

三次皆少——称为老阳

朱熹认为"挂扐法"是优于"过揲法"的. 他写道:"挂扐之数,乃七、八、九、六之原,而过揲之数,乃七、八、九、六之委. 其势又有轻重之不同,而或者乃欲废置挂扐,而独以过揲之数为断,则是舍本而取末,去约以就繁,而不知其不可也."①朱熹的说法,颇引起后人的非议. 其实,"过揲法"与"挂扐法"是等价的,可以说约繁相似,互为原委. 根据《系辞》筮法,用 49 策,$49=4\times12+1$,$k=12$,$r=1$,根据(*)式,所得筮数应为

$$n=12-\theta \quad (3\leqslant\theta\leqslant6)$$

$$\theta=\theta_1+\theta_2+\theta_3 \quad (1\leqslant\theta_i\leqslant2,i=1,2,3)$$

① 朱熹:《易学启蒙》,转引自刘大钧《周易概论》,p. 106,齐鲁书社,1986 年版.

很显然，当 $\theta_i=1$ 就是朱熹所说的“少”，$\theta_i=2$ 就是朱熹所说的“多”.

当 $\theta=3$，知 $\theta_1=\theta_2=\theta_3=1$，即“三少”；

当 $\theta=4$，知 $\theta_1,\theta_2,\theta_3$ 中有两个为 1，一个为 2，即“两少一多”；

当 $\theta=5$，知 $\theta_1,\theta_2,\theta_3$ 中有两个为 2，一个为 1，即“两多一少”；

当 $\theta=6$，知 $\theta_1=\theta_2=\theta_3=2$，即“三多”.

根据上述分析，“过揲”与“挂扐”实在没有优劣之分.

例 5.1.2 关于模 m 的全体剩余类所成之集

$$H=\{K_0,K_1,K_2,\cdots,K_{m-1}\}$$

按照模的加法运算构成一个交换群. 其加法的定义为：设 $K_i,K_j\in H$，且 $i+j\equiv r(\mathrm{mod}m)$，则规定

$$K_i+K_j=K_r$$

对于(1)所定义的运算显然对 H 封闭，K_0 是群的单位元.

更简单地，如果取 m 的一个完系. 例如，

$$M=\{0,1,2,\cdots,m-1\}$$

按照模算术的加法运算，若 $i,j\in M$，则当 $i+j\equiv r(\mathrm{mod}m)$，且 $r\in M$ 时，规定

$$i+j=r \tag{2}$$

对于模算术的加法，M 构成一个交换群.

特别地，当 $m=2$，$M=\{0,1\}$，就得到例题 4.1.4 所讲的“模 2 加群”. 将 $M=\{0,1\}$ 的运算引进到易卦的每一个爻位上，就得到例 4.1.4 所讲的“易卦加群”，它与“易卦乘群”同构. 乘群的单位元是乾卦=(1,1,1,1,1,1)，加群的单位元是坤卦=(0,0,0,0,0,0). 足见乾、坤两卦的特殊地位.《周易参同契》一书中有言：“乾、坤者，易之门户，众卦之父母.”善哉斯言！

§5.2 揲蓍的数学原理

根据现有的文字记载，古人采用“数占”方法求卦，“数占”不管采用什么形式，从本质上讲是要求得一些整数，并使奇数对应于阳爻“—”，偶数对应于阴爻“--”，便得到一个卦.“数占”法都与同余式有密切的关系.得到筮数的方法可以分为两大类：一类是取模 m 的余数 $1,2,\cdots,m$ 为筮数的.如有一种被称为“上牌”筮法的数占法是这样的：取 R 策蓍草；任意分而为 4；除掉其中一份，称为“上牌”；其余的 3 份，分别揲之以 8，即对模 8 取余数，余数得奇数就取阳爻，余数是偶数的就取阴爻，就得到一个三爻卦.再重复一次就得到一个易卦.另一类是在去掉若干蓍草后，对剩下的蓍草数取 m 的倍数，如《系辞》所用的筮法.

《周易·系辞》筮法涉及到多个数据；“其用四十有九”的 49，“分而为二”的 2，“挂一”的 1，“揲之以四”的 4，“三变成爻”的 3.对于这些数据，历来都被易学家看得很神秘，能否进行变动？为什么“大衍之数”是 50？而其用却又是“四十有九”.等等.都是易学研究中长期悬而未决的问题.本书将在第八章中对这些问题作进一步的讨论.此处我们先研究《系辞》所用筮法的数学原理.为此，我们把它推广到一般的情况：

《系辞》筮法	扩广筮法
用数“四十有九”	用数 N_0
$(49=4\times12+1)$	(设 $N_0=mq+r,0\leqslant r\leqslant m-1$)
分而为 2	分而为 $k(k\geqslant2)$
挂 1	挂 $l(0\leqslant l\leqslant m-1)$
揲之以 4	揲之以 m
3 变而得一爻	n 变而得一爻

在推广后的筮法中，包含 6 个参数：m,q,r,k,l,n.可称之为

(m,q,r,k,l,n)广义筮法. 为了研究 6 个参数变化时对筮数的影响,我们先把它转化为数学模型.

设有正整数

$$N_0=mq+r \quad (m>1,0\leqslant r\leqslant m) \tag{1}$$

取整数 $l(0\leqslant l\leqslant m-1)$. 将 N_0-l 任意分成 k 个$(k\geqslant 2)$正整数之和

$$N_0-l=R_1+R_2+\cdots+R_k \tag{2}$$

设 $R_1,R_2,\cdots,R_k$ 用 m 除所得的"余数"分别为 $r_1,r_2,\cdots,r_k(1\leqslant r_i\leqslant m,i=1,2,\cdots,k)$,即

$$R_i\equiv r_i(\mathrm{mod}m) \quad (1\leqslant r_i\leqslant m,i=1,2,\cdots,k) \tag{3}$$

记

$$N_1=f(N_0)=N_0-(l+r_1+r_2+\cdots+r_k) \tag{4}$$

从 N_0 求得 N_1 这一套手续称为"一变".

再以 N_1 为原始数,重复上述过程,求得

$$N_2=f(N_1)=f[f(N_0)]=f^{(2)}(N_0)$$

称为"二变". 如此继续,经过 n 变后,得到正整数 N_n

$$N_n=f(N_{n-1})=f[f(N_{n-2})]=\cdots=\overbrace{f[f(\cdots f(N_0)\cdots)]}^{n\text{个}f}$$
$$=f^{(n)}(N_0) \quad (N_n>0) \tag{5}$$

令

$$\theta_n=N_n/m \tag{6}$$

定义 5.2.1 由(6)式决定的数 θ_n 称为(m,q,r,k,l,n)广义筮法的筮数.

很明显,θ_n 的取值随参数 m,q,r,k,l,n 的 6 个参数值的不同而变化. 我们证明下面的一个定理,姑称之为"筮法定理".

定理 5.2.1(筮法定理) 若原始策数

$$N_0=mq+r \quad (m>1,0\leqslant r\leqslant m-1)$$

对其施行(m,q,r,k,l,n)广义筮法，得到筮数

$$\theta_n=\frac{N_n}{m}=\frac{f^{(n)}(N_0)}{m} \tag{7}$$

则θ_n是一些连续的整数.其取值的个数和范围满足下述关系：

参数之间的关系		θ_n取值范围	θ_n取值个数	编号
$l-r\geqslant 0$	$k+l\leqslant m$	$q-nk\leqslant\theta_n\leqslant q-n$	$n(k-1)+1$	A
	$m<k+l\leqslant m+r$	$q-nk\leqslant\theta_n\leqslant q-2n+1$	$n(k-2)+2$	B
	$m+r<k+l$	$q-nk\leqslant\theta_n\leqslant q-2n$	$n(k-2)+1$	C
$l-r<0$	$0<k+l\leqslant r$	$q-nk+1\leqslant\theta_n\leqslant q-n+1$	$n(k-1)+1$	D
	$r<k+l\leqslant m$	$q-nk+1\leqslant\theta_n\leqslant q-n$	$n(k-1)$	E
	$m<k+l$	$q-nk+1\leqslant\theta_n\leqslant q-2n+1$	$n(k-2)+1$	F

(8)

这个定理的证明较繁，需要先证明几个引理：

引理一 对任意的(m,q,r,k,l,n)广义筮法，$N_i=f^{(i)}(N_0)$都是m的倍数，即

$$N_i=f^{(i)}(N_0)\equiv 0(\mathrm{mod}m)\quad(i=1,2,\cdots,n) \tag{9}$$

证明 设

$$R_i\equiv r_i(\mathrm{mod}m)\quad(1\leqslant r_i\leqslant m,i=1,2,\cdots,k)$$

因$N_0=l+R_1+R_2+\cdots+R_k$，于是

$$N_0-l=R_1+R_2+\cdots+R_k$$

$$\equiv(r_1+r_2+\cdots+r_k)(\mathrm{mod}m)$$

$$(N_0-l-(r_1+r_2+\cdots+r_k)\equiv 0(\mathrm{mod}m)$$

但 $N_1=f(N_0)=N_0-(l+r_1+r_2+\cdots+r_k)$

所以 $N_1=f(N_0)\equiv 0(\mathrm{mod}m)$

类似地，有

$$N_2=f(N_1)\equiv 0(\mathrm{mod}m)$$

……

$$N_k=f(N_{k-1})\equiv 0(\mathrm{mod}m)$$

引理二 对任一(m,q,r,k,l,n)广义筮法，令一变后的$N_1=f(N_0)=m\theta_1$，则θ_1取一些连续整数值，并满足下述关系：

参数所满足的条件	θ_1 取值的范围	取值个数	编号
$l-r\geqslant 0$ 且 $k+(l-r)\leqslant m$	$q-k\leqslant\theta_1\leqslant q-1$	k	A
$l-r\geqslant 0$ 且 $m<k+(l-r)$	$q-k\leqslant\theta_1\leqslant q-2$	$k-1$	B
$l-r<0$ 且 $k+(l-r)>0$	$q-k+1\leqslant\theta_1\leqslant q-1$	$k-1$	C
$l-r<0$ 且 $k+(l-r)\leqslant 0$	$q-k+1\leqslant\theta_1\leqslant q$	k	D

(10)

证明 $m\theta_1=(mq+r)-(r_1+r_2+\cdots+r_k+l)$

$=mq-[r_1+r_2+\cdots+r_k+(l-r)]$

所以

$$r_1+r_2+\cdots+r_kf(l-r)=m(q-\theta_1) \tag{11}$$

因为对 $i=1,2,\cdots,k$，都有 $1\leqslant r_i\leqslant m$，故有

$$k\leqslant r_1+r_2+\cdots+r_k\leqslant km \tag{12}$$

由(11)与(12)得

$$k+(l-r)\leqslant m(q-\theta_1)\leqslant mk+(l-r) \tag{13}$$

且 $m(q-\theta_1)$ 可取得满足(13)的一切 m 的倍数值.

现就(13)分别讨论：

对(10)-A：当 $l-r\geqslant 0$，且 $k+(l-r)\leqslant m$ 时：

$k+(l-r)\leqslant m\leqslant m(q-\theta_1)\leqslant mk+(l-r)<m(k+1)$

故有 $1\leqslant q-\theta_1\leqslant k$

即 $q-k\leqslant\theta_1\leqslant q-1$

对(10)-B：当 $l-r\geqslant 0$，且 $k+(l-r)>m$ 时：

$m<k+(l-r)\leqslant m(q-\theta_1)$

$\leqslant mk+(l-r)<mk+m=m(k+1)$

故有 $2\leqslant q-\theta_1\leqslant k$

或 $q-k\leqslant\theta_1\leqslant q-2$

对(10)-C：$l-r<0$，且 $k+(l-r)>0$.

$0<k+(l-r)\leqslant m(q-\theta_1)\leqslant mk+(l-r)<mk$

故有 $1\leqslant q-\theta_1\leqslant k-1$

或 $q-k+1\leqslant\theta_1\leqslant q-1$

对(10)-D：$l-r<0$，且 $k+(l-r)\leqslant 0$. 因为 $k>0$，$0\leqslant l\leqslant m-1$，$0\leqslant r\leqslant$

$m-1,-m+1<l-r\leqslant 0$，故

$$-m<k+(l-r)\leqslant m(q-\theta_1)\leqslant mk+(l-r)<mk$$

所以　$0\leqslant q-\theta_1\leqslant k-1$

即　$q-k+1\leqslant\theta_1\leqslant q$

引理二至此证完.

引理三　对 $r=0$ 的 $(m,q,0,k,l,n)$ 广义筮法，记 $N_n=f^{(n)}(N_0)=m\theta_n$，则 θ_n 满足关系：

(A)　当 $k+l\leqslant m$ 时，

$$q-nk\leqslant\theta_n\leqslant q-n \tag{14}$$

(B)　当 $k+l>m$ 时，

$$q-nk\leqslant\theta_n\leqslant q-2n$$

证明　先用数学归纳法证(14)-A 成立.

因 $r=0$，总有 $l-r\geqslant 0$，且因 $k+l=k+(l-r)\leqslant m$，故由引理二的(10)-A，有

$$q-k\leqslant\theta_1\leqslant q-1 \tag{15}$$

即(10)-A 对 $n=1$ 时成立. 假定(10)-A 对 $n=i$ 时成立，即若令 $N_i=m\theta_i$ 时，有

$$q-ik\leqslant\theta_i\leqslant q-i \tag{16}$$

我们把 $N_{i+1}=f(N_i)$ 看作以 N_i 为原始数的“一变”结果，记 $f(N_i)=m\theta_1'$，则由引理二的(10)-A，我们有

$$\theta_i-k\leqslant\theta_1'\leqslant\theta_i-1 \tag{17}$$

将(16)代入(17)，并注意到 $\theta_1'=\theta_{i+1}$，即得

$$q-(i+1)k\leqslant\theta_{i+1}\leqslant q-(i+1)$$

即(14)-A 对 $n=i+1$ 也成立. 即(14)-A 对一切使 $N_n>0$ 的 n 都成立.

完全类似的，利用数学归纳法和引理二的(10)-B 可证：对一切使 $N_n>0$ 的 n，(14)-B 也成立.

利用引理二、三易证明筮法定理.

因为由原始数 $N_0=mq+r$ 实行 (m,q,r,k,l,n) 筮法得到的 θ_n，也可看作是以 $N_1=m\theta_1$ 为原始数实行 $(m,\theta_1,0,k,l,n-1)$ 筮法的结果，若将此结果记

为 $N'_{n-1}=m\theta'_{n-1}$，则

$$N_n=m\theta_n=N'_{n-1}=m\theta'_{n-1}$$

从而 $$\theta_n=\theta'_{n-1} \tag{18}$$

现在就(8)中的各种情况分别讨论：

对(8)-A：$l-r\geqslant 0$，$k+l\leqslant m$

因 $k+l-r\leqslant m$，由引理二的(9)-A，有

$$q-k\leqslant\theta_1\leqslant q-1 \tag{19}$$

又由引理三的(14)-A，有

$$\theta_1-(n-1)k\leqslant\theta'_{n-1}\leqslant\theta_1-(n-1) \tag{20}$$

由(19)与(20)即得(8)-A：

$$q-nk\leqslant\theta_n=\theta'_{n-1}\leqslant q-n$$

(8)-B：$l-r\geqslant 0$，且 $m<k+l\leqslant m+r$

这时有 $k+(l-r)\leqslant m$ 及 $k+l>m$，由引理二的(9)-A 与引理三的(13)-B，有

$$q-k\leqslant\theta_1\leqslant q-1$$

$$\theta_1-(n-1)k\leqslant\theta'_{n-1}\leqslant\theta_1-2(n-1)$$

即得 $$q-nk\leqslant\theta_n\leqslant q-2n+1$$

(8)-C： $l-r\geqslant 0$，且 $k+l>m+r$

这时有 $k+l-r>m$，由引理二的(10)-B 和引理三的(14)-B 推出

$$q-k\leqslant\theta_1\leqslant q-2$$

$$\theta_1-(n-1)k\leqslant k\leqslant\theta'_{n-1}\leqslant q-2(n-1)$$

即 $$q-nk\leqslant\theta_n\leqslant q-2n$$

(8)-D： $l-r<0$，且 $0<k+l\leqslant r$

这时有 $k+l<m$ 及 $k+l-r\leqslant 0$ 由引理二的(10)-D 及引理三的(14)-A，有

$$q-k+1\leqslant\theta_1\leqslant q$$

$$\theta_1-(n-1)k\leqslant\theta'_{n-1}\leqslant\theta_1-(n-1)$$

即 $$q-nk\pm 1\leqslant\theta_n\leqslant q-n+1$$

(8)-E： $l-r<0$，且 $r<k+l\leqslant m$

这时有 $k+(l-r)>0$，由引理二的(10)-C 及引理三的(14)-A，有

$$q-k+1\leqslant\theta_1\leqslant q-1$$

$$\theta_1-(n-1)k\leqslant\theta'_{n-1}\leqslant\theta-(n-1)$$

即 $$q-nk+1\leqslant\theta_n\leqslant q-n$$

(8)-F：$l-r<0$ 且 $m<k+l$

这时有 $0<m-r<k+(l-r)$，由引理二的(9)-C 及引理三的(14)-B，有

$$q-k+1\leqslant\theta_1\leqslant q-1$$

$$\theta_1-(n-1)k\leqslant\theta'_{n-1}\leqslant q-2(n-1)$$

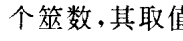
即 $$q-nk+1\leqslant\theta_n\leqslant q-2n+1$$

筮法定理至此全部证完.

例题 5.2.1 “大衍之数五十，其用四十有九”. 古人为什么只用 49 策占筮，为什么不直接用 50 策？历来易学家认为很神秘，对它作过种种猜测与假定. 根据筮法定理，似乎可以对这个问题作出一种解释.

因为 $50=4\times12+2$，如果用 50 策开始按照《系辞》的筮仪程序，就是一个(4,12,2,2,1,3)广义筮法. 对这个筮法 $m=4,q=12,r=2,k=2,l=1,n=3$. 并且 $l-r=1-2<0,r<k+l<m$，这符合筮法定理的结论表(8)-E 的情况，筮数 θ_3 取值的范围是 $q-nk+1\leqslant\theta_n\leqslant q-n$，即 $12-3\times2+1\leqslant\theta_n\leqslant12-3$ 或 $7\leqslant\theta_n\leqslant9$，$\theta_n$ 取 $n(k-1)=3(2-1)=3$ 个值. 最后结果不能得到 4 个筮数. 当“其用四十有九”时，$49=4\times12+1$，6 个参数中 r 由 $r=2$ 变为 $r=1$，其余 5 个参数均未发生变化. 但因 $l-r\geqslant0,k+l\leqslant m$，条件变为符合条件(8)-A，故最后得 $n(k-1)+1=3\times(2-1)+1=4$ 个筮数，其取值范围是 $q-nk\leqslant\theta_3\leqslant q-n$，即 $12-3\times2=6\leqslant\theta_3\leqslant12-3=9$.

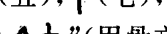
例题 5.2.2 在出土甲骨文中发现一种“奇字”，它是由 6 个符号：



中取 6 个或 3 个符号组成的. 考古学家认为这些奇字就是易卦，

易卦是数占得来的，奇字就是数占的记录．上述符号都是数字，它们的对应关系是

—(一)，(五)，(七)，(六)，(八)；(九)

所以，“奇字”(甲骨文是直写)就是数字卦“七五六六六七”，如果奇数对应阳爻，偶数对应阴爻，这个数字卦就是(1,1,0,0,0,1)＝䷒卦．因此，人们认为，易卦起源于数占，甲骨文“奇字”就是有力的证明．

但是，根据筮法定理，按照《系辞》筮法的办法的占筮，所得的筮数必须是连续的整数，而不可能是 1,5,7,6,8,9 这样 6 个不连续的整数．这只能有两种解释：要么奇字中的符号压根儿就不是数字，而是别的什么符号；要么奇字虽然是数占的记录，但所用的筮法决不是《系辞》所载的筮法．因此，易卦起源于数占的论断不无值得商榷的地方．

第六章　周易与组合论

河出图，洛出书，圣人则之.

——《周易·系辞》

组合数学是一门古老的但今天仍在蓬勃发展的数学分支，它研究的主要内容是计数和构形. 例如，用阳爻“—”和阴爻“--”这两种符号，每次按顺序取 6 个符号，排成一个卦，问一共可排成多少种不同的卦？这就是一个典型的组合计数问题. 又例如《系辞》说：“河出图，洛出书，圣人则之”. 将洛书简化成“九宫图”后，就相当于把 1，2，3，4，5，6，7，8，9 这 9 个数字填在一个 3×3 的方格内，使得三行、三列及两条对角线上的三个数之和都相等. 这是一个典型的构形问题. 图论是近数十年来从组合论中分离出来的一个数学分支，随着计算技术的需要而得到了蓬勃的发展.

§6.1　排列与组合

研究计数问题，从下面两个最简单但也是最重要的法则开始.

(一)加法原理　如果某一事件可以通过两种不同的方式 A 或 B 来实现，它们不能同时发生，实现 A 有 a 种方法，实现 B 有 b

种方法，那么此一事件实现的方法(即 A 或 B 两部分至少实现一种)有 $a+b$ 种.

例如从长沙到武汉每天有 6 次不同的火车，有 2 次不同的长途汽车，那么，一位旅客要乘车(火车或汽车)从长沙去武汉的方法有 $6+2=8$ 种.

必须注意，加法原理对于 A 与 B 两部分可能重叠时是不适用的. 例如，某校学生有 4 人在今年的数学竞赛中获奖，有 2 人在今年的物理竞赛中获奖. 是否该校今年在数学和物理竞赛中获奖的学生是 $4+2=6$ 名呢？不一定！因为可能有的学生既是数学竞赛的获奖者，又是物理竞赛的获奖者.

(二)乘法原理　如果某一事件要分成两步来实现，实现第一步 A 有 a 种不同的方法，实现第一步 A 后再实现第二步 B 有 b 种不同的方法，那么实现这一事件就有 $a\times b$ 种不同的方法.

例如，从武汉乘火车经北京中转去沈阳，从武汉至北京有 6 次不同的列车，从北京去沈阳有 4 次不同的列车，则旅客从武汉乘火车经北京去沈阳的方式有 $4\times 6=24$ 种.

定义 6.1.1　有 n 个元素中取 r 个($r\leqslant n$，不重复)排成一行，每一种排列方式称为 n 个元素中取 r 个的排列. 这种排列的总数记作 P_n^r.

定理 6.1.1　n 个元素中取 r 个的排列总数为

$$P_n^r=n!/(n-r)!$$

(记号 $n!$ 表示从 1 到 n 之间的所有正整数的乘积，称为 n 的阶乘.)

定义 6.1.2　从 n 个元素中选取 r 个($r\leqslant n$)而不考虑其次序，每一种选取方式称为从 n 个元素中取 r 个的组合，组合的总数记为 C_n^r 或 $\binom{n}{r}$.

定理 6.1.2 从 n 个元素中取 r 个的组合数为

$$C_n^r=n!/[r!\ (n-r)!]$$

排列与组合的不同之处，在于排列要考虑次序而组合不考虑次序. 例如，从 6 人中选出一个 3 人代表团，团员都处于平等地位，是组合问题；如果从 6 人中选一名团长，一名副团长，一名团员组成 3 人代表团，则为排列问题，前者的选出方法数为

$$C_6^3=6!/(3!3!)=20(\text{种})$$

而后者的选出方法数为

$$P_6^3=6!/3!=120(\text{种})$$

定义 6.1.3 从 n 个元素的集合中有次序地选取 r 个元素，每次选取后可重新放回，称为从 n 个元素中取 r 个的重复排列.

定理 6.1.3 从 n 个元素中取 r 个的重复排列数是 n^r.

定义 6.1.4 从 n 个元素的集中不计次序可以放回地选取 r 个元素的一种方式称为从 n 个元素中取 r 个的重复组合.

定理 6.1.4 从 n 个元素中取 r 个的重复组合数为 C_{n+r-1}^r.

例如，某城市的电话号码由 6 位数字组成，每一个电话是一个从 10 个数码中取 6 个的重复排列，所以装机容量为 $10^6=1000000$ 部.

有 A、B、C 三种奖券，连续摸奖 3 次，每次摸后奖券放回，则得奖的方式是 3 个元素的可重复 3 组合，组合数是

$$C_{3+3-1}^{3}=C_5^2=\frac{5\times4}{2\times1}=10(\text{种})$$

现将从一个 n 元集中取 r 个元素的方式数列表比较如下：

定理 6.1.5 二项式定理

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^kx^ky^{n-k}$$

定理 6.1.6 $C_n^k=C_n^{n-k}\quad(0\leqslant k\leqslant n)$

名　称	是否考虑次序	是否允许放回	取法总数公式
排　列	要	否	$n!/[(n-r)!]$
组　合	否	否	$n!/[(n-r)!r!]$
重复排列	要	可	n^r
重复组合	否	可	$(n-1+r)!/[r!(n-1)!]$

例题 6.1.1　利用定理 6.1.1～6.1.6 可以很方便地计算出《周易》中的许多数据.

(1)一个 3 爻卦相当于从二元素集{—,--}取 3 个的重复排列,故其个数为 $2^3=8$.

(2)一个 6 爻卦相当于从二元素集{—,--}取 6 个的重复排列,共有 $2^6=64$ 个.

(3)将一个卦倒转过来,所得的新卦称为原卦的复卦,如果一个卦的复卦仍是它自己,则称为自复卦,我们来计算自复卦的个数.

一个卦自复的充要条件是它的初爻与上爻、第二爻与第五爻、第三爻与第四爻的爻性相同.因此,每一个自复卦由它的下卦完全决定.一个自复卦对应一个 3 爻卦,3 爻卦共有 $2^3=8$ 个,故自复卦也有 8 个.

(4)将一个卦的所有爻都改成相反的爻,所得的新卦称为原卦的变卦或旁通卦.如果一个卦的变卦与其复卦相同,则称为"亦复亦变".一个卦是亦复亦变的充要条件是它的初爻与上爻、第二爻与第五爻、第三爻与第四爻有相反的爻性.因此,每一个亦复亦变卦也由它的下卦完全决定.因而一个亦复亦变的卦对应一个 3 爻卦,故共有 $2^3=8$ 个.

(5)朱熹在《周易本义》中引李之才的卦图,按卦中阳爻的个数将 64 卦分类排列,以计算出"一阳五阴之卦"、"二阳四阴之卦",等等的个数.

在二项式定理中，令 $n=6$，则有

$$(x+y)^6=x^6+6x^5+10x^4y^2+15x^3y^3+10x^2y^4+6xy^5+y^6$$

当我们把 x 看作阳爻，y 看作阴爻，则 x^5y 表示“五阳一阴之卦”，x^3y^3 表示“三阳三阴之卦”，x^5y 的系数就是“五阳一阴之卦”的个数，x^3y^3 的系数就是“三阳三阴之卦”的个数，等等. 由此可知：

六阳或六阴之卦各有 1 个；

五阳一阴或一阳五阴之卦各有 6 个；

四阳二阴或二阳四阴之卦各有 10 个；

三阳三阴之卦共有 15 个.

(6)汉扬雄根据《周易》作《太玄经》. 他用 3 种不同的爻{—，－－，－－－}来成卦，可称之为三元卦.

两爻的三元卦有 $3^2=9$ 个；

3 爻的三元卦有 $3^3=27$ 个；

4 爻的三元卦有 $3^4=81$ 个.

例题 6.1.2 东汉易学家讲卦变还有一种“互体”的说法，所谓“互体之象”，是指在一个卦中共有 6 爻，第一、第二、第三 3 个爻组成一个经卦，第四、第五、第六 3 个爻也组成一个经卦. 这是易卦的上、下卦. 除此之外，第二、第三、第四 3 个爻也可以组成一个经卦. 第三、第四、第五 3 爻也组成一个经卦. 后面这两个经卦称为原来的易卦的“互体之象”.

这也是一个典型的组合问题：“将 1,2,3,4,5,6 等 6 个数字能组成多少 3 个连续的整数组”. 其答案是 4 个，即

$$123,234,345,456 \tag{1}$$

当用 1,2,3,4,5,6 表示一个易卦的 6 个爻位，123 表示由第一、第二、第三爻组成的经卦时，(1)中的 4 个“3 连续整数组”就分别表示一个易卦的上卦(456)，下卦(123)和“互体之象”(234 与 345).

东汉人讲“互体”，还有一种“连互”之法，即将(1)中4个组两两重叠起来组成一个易卦，但作下卦的开头一个数必须小于作上卦的开头一个数，例如(123)(234)可以连成一卦，但是(345)(234)则不能连成一卦.这样“连互”起来的新易卦，分别称为原卦的“四画连互”(只包含原卦的4个爻)、“五画连互”(包含原卦的5个爻).

这也是一个组合问题，显然“连互”的卦共有

$$2+2+1=5(\text{个})$$

即 (123)(234)——四画连互

(123)(345)——五画连互

(234)(345)——四画连互

(234)(456)——五画连互

(345)(456)——四画连互

例如屯卦䷂，它的上、下卦与互体之象是：

(123)—→☳，(234)—→☵

(345)—→☵，(456)—→☵

其“连互之象”有：

四画连互：

(123)(234)—→䷗，(234)(345)—→䷾，

(345)(456)—→䷿

五画连互：

(123)(345)—→䷽，(234)(456)—→䷾

例题6.1.3 《系辞》说“河出图，洛出书，圣人则之.”但是“河图”、“洛书”到底是什么样子，先秦、汉、唐都未见到.及到宋人的著作中才画有“河图”、“洛书”，如第二章图2.3.3所示.

将“洛书”图形中的圆点数换成数字，就得到一个由1到9这9个连续自然数排成的3×3方阵图：

4	9	2
3	5	7
8	1	6

在这个 3×3 方阵中，每行每列以及两条对角线上 3 个数之和等于 15. 宋朝著名数学家杨辉(约 13 世纪)称这种图为“纵横图”，并对它进行了深入的研究. 并且加以推广：将 $1,2,\cdots,n^2(n\geqslant 3)$ 这 n^2 个连续的自然数排成一个 n 行 n 列的方阵，使得每行、每列以及两条主对角线上的 n 个数之和都相等. 满足这种要求的方阵就称为“n 阶纵横图”或“n 阶幻方”. 制造 n 阶幻方是组合学中一个有趣的课题.

“洛书”就是一个 3 阶幻方，它是世界上最古老的组合问题之一. 下面是杨辉在《续古摘奇算经》中提出的方法：“九子斜排，上下对易，左右相更，四维挺进. 载九履一，左三右七，二四为肩，六八为足”. 这段话表明的方法是：

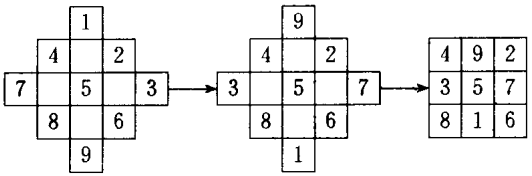


图 6.1.2

(1)将 1～9 这 9 个数按顺序排成如图 6.1.2(a)的 3 个斜行.

(2)将最上方的数 1 与最下方的数 9 对换(上下对易)，左边的 7 与右边的 3 对换(左右相更)，如图(b).

(3)将上下左右 4 个凸出的数“挺进”相邻的 4 个空格内(四维挺进). 即得.

§6.2 图的基本概念

这里所说的图是一些由点和线组成的图形，与通常的函数图形或几何图形是不同的概念，与易学研究中所说的易图更是不同的概念. 图在本质上是集合元素间的一种关系.

定义 6.2.1 设 V 是平面上的有限点集，在这些点之间连有一些线，其所成之集记为 E，则 V 与 E 合在一起称为一个图，

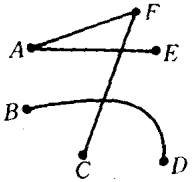
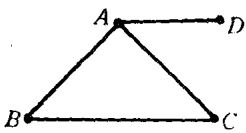


图 6.2.1



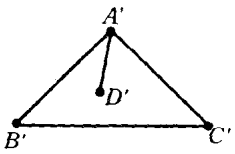


图 6.2.2

记作 $G=(V,E)$. V 中的点称为图的顶点，E 中的线称为图的边，顶点的个数则称为图的阶，记作 $|G|$.

如图 6.2.1 是一个 6 阶图，它的顶点集 $V=\{A,B,C,D,E,F\}$，边集 $E=\{AF,AE,FC,BD\}$.

定义 6.2.2 如果两个图的顶点之间有一一对应关系，并且相应的边也一一对应，则称为两个图同构. 两个同构的图被认为是同一个图.

图 6.2.2 的两图虽然形状不同，但它们同构，故可视为同一个图.

定义 6.2.3 设 A、B 是一个图 G 中的两个顶点，如果有一个图 G 中的点列

$$A=A_0,A_1,A_2,\cdots,A_m=B$$

使得点列中任何相邻的两点之间都有边相连，则称为一个边序列.

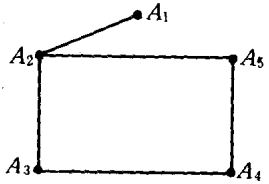


图 6.2.3

若一个边序列中的点 $A_0,A_1,A_2,\cdots,A_m$ 彼此互不相同，则称

为一条道路，m 称为道路的长.

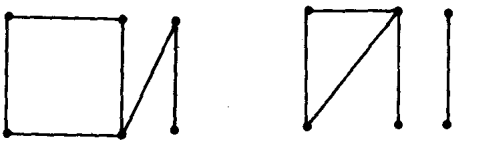
若在一个边序列中，$A_0=A_m$，则称为一条闭路.

若在一条闭路中，$A_0, A_1, \cdots, A_{m-1}$都不相同，则称为一个圈.

例如，$A_1, A_2, A_3, A_5, A_4, A_3, A_2$ 是一个边序列，但不是一条道路，因 A_2, A_3 两个顶点各出现了两次. 但 A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 是一条道路，其长为 4. 而 A_2, A_3, A_4, A_5, A_2 是一条闭路，也是一个圈.

定义 6.2.4 对于一个图 $G=(V,E)$，若任取 $A, B\in V$，都存在从 A 到 B 的一条道路，则图 G 称为是连通的.

如在图 6.2.4 中，图(a)是连通的，图(b)是不连通的.

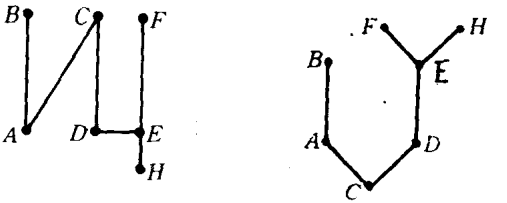


(a) (b)

图 6.2.4

定义 6.2.5 一个没有圈的连通图称为树.

一个树总可以画成“树形”，故称为树. 如图 6.2.5(a)是一个连通图，它可以画成像图(b)那样的树形.



(a) (b)

图 6.2.5

例 6.2.1 历代易学家创造了许多“图”来表示易卦，形成了一门庞大的“图书之学”. 清学者胡谓就写过《易图明辨》一书，专门阐释各种易图. 那些图都与本章所说的图无关. 现在我们介

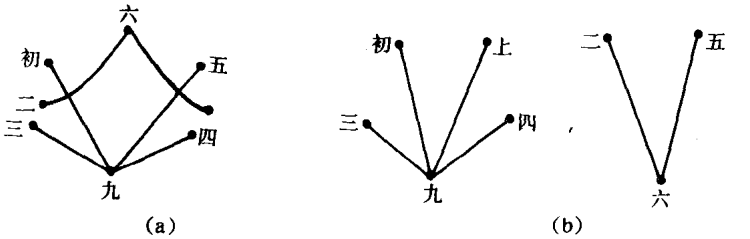


图 6.2.6

绍怎样用图论里的一个 8 阶图来表示一个易卦. 例如离卦☲=(1,0,1,1,0,1)，可用图 6.2.6 的(a)来表示. 该图的 8 个顶点中的两个是“六”和“九”，其余顶点为“初，二，三，四，五，上”，若初爻是阳爻，则在“初”与“九”之间连一条线；若初爻是阴爻，则在“初”与“六”之间联一条线. 余可类推. 离卦也可画成图(b)那样由两个不连通的树组成的图.

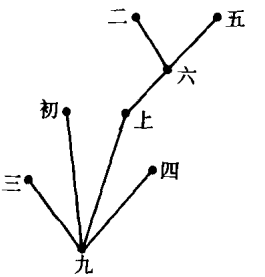


图 6.2.7

如果离卦的“上九”阳爻变为上六阴爻，离卦☲变为丰卦䷶，即“遇离之丰”，则这个变卦可用一个连通的树表示.

例 6.2.2 《系辞》说：“易有太极，是生两仪. 两仪生四象，四象生八卦……”.

如果我们取“太极”(用○表示)，两仪(⚊与⚋)，四象(⚌，⚍，⚎，⚏)、八卦(☰，☱，☲，☳，☴，☵，☶，☷)这 15 个元素为顶

点，两点之间一点是由另一点加一爻画于其上而成的，则在这两点之间连一条线；否则，两点之间不连线，就得到一个 15 顶点，14 条边的树，如图 6.2.8. 这种树叫做“二叉树”.

继续延伸这个二叉树，顺次画出四爻、五爻、六爻的顶点，就得到一个

$$1+2+4+8+16+32+64=127$$

阶的树，这个 127 阶树最上一层的顶点即易 64 卦，它按伏羲卦序排列.

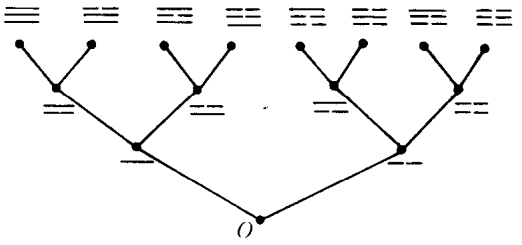


图 6.2.8

§ 6.3 整数的分拆

在《洛书》中，把 1～9 的 9 个整数排成一个 3×3 的方阵，使得每一横行、每一纵列和两条对角线上的数之和都等于 15：

$$15=4+9+2=3+5+7=8+1+6$$
$$=4+3+8=9+5+1=2+7+6$$
$$=4+5+6=2+5+8$$

如果换一个角度看问题，也可以看作是把 15 这个正整数分成 3 个正整数之和. 这样把一个正整数 n 写成若干个正整数之和的方式，称为正整数 n 的一个分拆.

定义 6.3.1 将正整数 n 写成若干个正整数之和，如果不

计各加数的顺序，这个和称为 n 的一个分拆，分拆的总数用符号 $P(n)$ 表示.

例如，当 $n=4$，这些分拆是

$$4$$

$$3+1$$

$$2+2$$

$$2+1+1$$

$$1+1+1+1$$

因此 $P(4)=5$. 显然 $P(1)=1, P(2)=2, P(3)=3$.

计算整数的分拆数是组合论中较困难的问题. 我们只能简单地介绍几个与《周易》有关的结论.

定理 6.3.1 将正整数 n 写成若干个正整数 $a, b, c, \cdots$ 之和的方式数，等于代数式

$$\frac{1}{(1-x^a)(1-x^b)(1-x^c)\cdots}$$

展开以后 x^n 一项的系数(不计次序).

证明 为简便计，我们看 $n=6, a=1, b=2, c=3$ 的情形. 因为

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots,$$

$$\frac{1}{1-x^2}=1+x^2+x^4+x^6\cdots$$

$$\frac{1}{1-x^3}=1+x^3+x^6+x^9+\cdots$$

将 3 个等式相乘得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}\\&=(1+x+x^2+\cdots)(1+x^2+x^4+\cdots)(1+x^3+x^6+\cdots)\\&=1+x+2x^2+3x^3+4x^4+5x^5+7x^6+\cdots\end{aligned}$$

x^6 的系数是 7，因为有 7 种方式从 3 个因式中分别选取一项，使 3 项的乘积为 x^6，如下表所示：

取自第一因式	x^6	x^4	x^3	x^2	x	1	1
取自第二因式	1	x^2	1	x^4	x^2	x^6	1
取自第三因式	1	1	x^3	1	x^3	1	x^6

我们可将每一项与把 6 分拆为 1,2,3 之和的一个分拆联系起来. 因为同底数的幂相乘的算法是底数不变,指数相加. 所以,在分拆中各加项里面 1 的个数等于取自第一因式的那项 x 的指数,2 的个数等于取自第二因式的那项 x 的指数所含 2 的倍数,3 的个数等于取自第三因式的那项 x 的指数所含 3 的倍数. 例如,对于

$$x^6=x^4\cdot x^2\cdot 1$$

一项而言,取自第一因式的项是 x^4,x 的指数是 4;取自第二因式的项是 x^2,x 的指数是 2,是 2 的 1 倍;取自第三因式的项是 1,x 的指数为 0. 故所对应的分拆是 4 个 1 和 1 个 2 而没有 3 的和,即 $6=1+1+1+1+2$. 因此,6 的分拆数和 x^6 的系数同为 7.

上述论证显然可推广到一般的情况. 故定理 6.3.1 获证.

推论 n 的分拆数 $P(n)$ 等于 n 个因式

$$(1+x+x^2+\cdots)(1+x^2+x^4+\cdots)\times\cdots$$
$$\times(1+x^{n-1}+x^{2n-2}+\cdots)(1+x^n+x^{2n}+\cdots)$$

的展开式中 x^n 一项的系数.

定理 6.3.2 将正整数 n 分解为 k 个正整数之和,计及次序,可以重复的方式数为 C_{n-1}^{k-1}.

证明 我们用图 $|\times|\times\times|\times|\times\times\times|$ 表示将 7 分解为 $1+2+1+3$ 的分拆.

今在两条短线之间写上 n 个×,然后在 n 个×所成的 $n-1$ 个空隙之间任选 $k-1$ 个空隙,在每一空隙中画一短线,连同端点的两短线共 $k+1$ 根短线构成 k 个间格,每一间格里有若干个×,没有空的间格. 就得到一个把 n 分成 k 个正整数之和的方式. 在 $n-1$ 个空隙之中选 $k-1$ 个空隙的方式数有 C_{n-1}^{k-1},所以,把 n 分为 k 个正整数之和的方式数为 C_{n-1}^{k-1}.

例如,把 5 分解成 3 个数之和,各加数可以重复,计及次序

的方式数是 $C_3^2=6$ 种，它们是：

$$1+1+3,1+3+1,3+1+1,$$
$$2+2+1,2+1+2,1+2+2$$

定理 6.3.3 将正整数 n 分解为恰好 k 个数之和，其中有若干个可以为 0，加数可以重复，并计及次序（包括 0 的位置）的方式数为

$$C_k^0C_{n-1}^{k-1}+C_k^1C_{n-1}^{k-2}+\cdots+C_k^iC_{n-i}^{k-i-1}+\cdots+C_k^{k-1}C_{n-1}^0$$

证明 设某一种分解式包含 i 项 $0(i=0,1,\cdots,k-1)$，在去掉这 i 项后，剩下 $k-i$ 项，相当于把正整数 n 分解为 $k-i$ 个正整数之和的方式数，共有 C_{n-i-1}^{k-i-1} 种方式. 在 k 项中选出 i 项为 0 的方式数有 C_k^i，故把 n 分解为 k 项之和，其中有 i 项为 0（计及次序）的方式数为 $C_k^iC_{n-i-1}^{k-i-1}$. 对 $i=0,1,2,\cdots,k-1$ 求和，即得要证的结果.

例如，把 4 分解成 3 个数之和，其中有若干可以为 0，加数可以重复，且计及次序（包括 0 的位置）的方式数有

$$C_3^0C_3^2+C_3^1C_3^1+C_3^2C_3^0=3+9+3=15$$

种，它们是：

$$1+1+2,1+2+1,2+1+1,0+1+3,0+3+1$$
$$0+2+2,1+0+3,3+0+1,2+0+2,1+3+0$$
$$3+1+0,2+2+0,0+0+4,0+4+0,4+0+0$$

定理 6.3.4 记 (n,k,m) 为将正整数 n 分解为 k 个部分，使每一部分都不大于 m 的方式数，则 (n,k,m) 是多项式

$$(x+x^2+x^3+\cdots+x^m)^k$$

的展开式中 x^n 的系数.

证明 在 k 个形如 $(x+x^2+\cdots+x^m)$ 的因式中，每一个取一项共 k 项构成乘积 x^n 的方式数就是 x^n 的系数. 而每一个构成乘积 x^n 的方式都对应 n 的一个分拆. 分拆中第一项等于取自第一因式的那一项 x 的指数，分拆的第二项等于取自第二因式的那一项 x 的指数，余可类推，最后，分拆的第 k 项等于取自第 k 个因式的那一项 x 的指数. 由于取自每一个因式的那一项

x 的指数都不超过 m，故将 n 分解成 k 个数之和，它的每一项加数都不大于 m. 这就证明了 $(n,k,m)=(x+x^2+\cdots+x^m)^k$ 中 x^n 的系数.

例如，

$$(x+x^2+x^3)^4$$
$$=x^4+4x^5+10x^6+16x^7+19x^8+16x^9+10x^{10}+4x^{11}+x^{12}$$

故把 6 分解为 4 个加数之和，每一加数都不大于 3，并且计及次序的方式数有 10 种，它们是：

$1+1+1+3, 1+1+3+1, 1+3+1+1, 3+1+1+1,$
$1+1+2+2, 1+2+1+2, 1+2+2+1, 2+1+1+2,$
$2+1+2+1, 2+2+1+1$

例题 6.3.1 在第五章中我们介绍了 (m,q,r,k,l,n) 广义筮法. 假定开始有 $N=mq+r$ 策，将其分为 k 份：$R_1+l, R_2, \cdots, R_k$，若取 $l=r$，在第一份中"挂 l"之后，就得到

$$mq=R_1+R_2+\cdots+R_k \tag{1}$$

揲之以 m 得

$$\begin{aligned} R_1&=mq_1+r_1\\ R_2&=mq_2+r_2\\ &\quad (1\leqslant r_i\leqslant m, i=1,2,\cdots,k)\\ &\cdots\cdots\\ R_k&=mq_k+r_k \end{aligned} \tag{2}$$

从而有

$$r_1+r^2+\cdots+r_k=tm \quad (1\leqslant t\leqslant k<q) \tag{3}$$

$$q_1+q_2+\cdots+q_k=q-t \tag{4}$$

这里的(1)、(3)、(4)是 3 种不同的分拆.

(3)式将正整数 tm 分为 k 个正整数(计及次序，可以重复)之和，每一个加数不大于 m.

(4)式将正整数 $q-t$ 分为 k 个非负整数(计及次序，可以重

复，允许其中若干个为 0)之和.

(1)是将正整数分解为 k 个正整数之和，这些正整数要计及次序，分解方式共有 C_{mq-1}^{k-1} 种.

欲求(1)式分解的方式数，还可按如下步骤进行.

根据定理 6.3.4，求多项式 $(x+x^2+\cdots+x^m)^k$ 的展开式中 x^{tm} 的系数，即得(3)所表示的将 tm 分解为 k 个正整数之和的方式数，设为 a^t.

再根据定理 6.3.3，求出由(4)式表示的将正整数 $q-t$ 分解为 k 个非负整数之和的方式数，设为 b_t.

(3)的每一种分解方式可与(4)的每一种方式两两搭配，构成(2)式的一种，从而得到(1)所表示的一种分解式. 对于某一整数 t，(3)的分解方式有 a_t，(4)的分解方式有 b_t，(2)的分解方式有 $d_t=a_tb_t$，对所有可能的 t 求和，即得(1)的分解方式数：

$$C_{mq-1}^{k-1}=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_kb_k \tag{5}$$

例如在(8,11,1,6,1,1)广义筮法中，(1)、(3)、(4)式变为

$$88=R_1+R_2+R_3+R_4+R_5+R_6 \tag{1'}$$

$$8t=r_1+r_2+r_3+r_4+r_5+t_6 \tag{2'}$$

$$11-t=q_1+q_2+q_3+q_4+q_5+q_6 \tag{3'}$$

将多项式 $(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7+x^8)^6$ 展开后，可计算出

x^8 的系数为 21，即 $a_1=21$；

x^{16} 的系数为 2877，即 $a_2=2877$；

x^{24} 的系数为 15946，即 $a_3=15946$；

x^{32} 的系数为 12642，即 $a_4=12642$；

x^{40} 的系数为 1281，即 $a_5=1281$；

x^{48} 的系数为 1，即 $a_6=1$.

根据定理 6.3.3 的公式，计算 b_t. 当 $t=1$，$q-t=11-1=10$，有

$$b_1=C_6^0C_9^5+C_6^1C_9^4+C_6^2C_9^3+C_6^3C_9^2+C_6^4C_9^1+C_6^5C_9^0$$
$$=126+756+1260+720+135+6=3003$$

类似地，可计算出

$$b_1=3003,b_2=2002,b_3=1287$$
$$b_4=792,b_5=462,b_6=252$$

于是

$$d_1=a_1b_1=21\times3003=63063$$
$$d_2=2877\times2002=5759754$$
$$d_3=a_3b_3=15946\times1287=20522502$$
$$d_4=a_4b_4=12642\times792=10012464$$
$$d_5=a_5b_5=1281\times462=591822$$
$$d_6=a_6b_6=1\times252=252$$

所以，(1′)式的分拆数为

$$C_{87}^5=d_1+d_2+d_3+d_4+d_5+d_6$$
$$=63063+5759754+20522502$$
$$+10012464+591822+252$$
$$=36949857$$

在第七章和第八章我们将看到这个例题所提供的数据在研究与《周易》有关的甲骨文“奇字”问题时有所应用.

第七章　周易与概率论

阴阳不测之谓神.

——《周易·系辞》

概率论与数理统计是研究随机现象的规律性的一门科学，它是数学中一个重要而又活跃的分支. 古人把《周易》当作占筮之书，用易卦进行占筮，占筮之时首先要通过一种固定的程序得到一个卦. 但究竟得到哪一个卦，事前是不知道的，是一种随机现象. 所以，研究《周易》就不能不了解一些概率论的基本知识. 本章主要介绍一下古典概型的有关知识，特别是与古人“揲蓍成卦”密切相关的贝努里(Bernoulli，1654～1705)概型.

§7.1　随机事件与概率

在千变万化的客观世界中，一切事物或现象可以分成两类. 有些事物，它的结果只有一种可能，是必然发生或必然不可能发生的. 就以掷钱币为例，向地下掷一枚钱币，钱币必然向下落，这是必然要发生的；这件事也可以换一种说法，钱币飞上天去，则必然不可能发生. 还有另一种现象，它的结果有多种可能，事前并不能断定会发生哪种情况. 例如钱币落地后，正面向上还是反面向上，有两种可能，但在事前不能断定究竟出现哪一种结果.

这种现象叫做随机现象.

我们把掷一枚钱币称为一次试验.这种试验具有共同的特点:

(1)试验可以在相同的条件下重复地进行;

(2)试验的可能结果不止一种,但能事先明确所有可能结果;

(3)试验之前并不能确定哪一种结果出现.

我们把具有上述特点的试验称为随机试验(简称试验).随机试验的一种可能结果叫做一个随机事件(简称事件).随机事件可以分成两种:一种不能再分解,称为基本事件.在一次随机试验中,必然出现一个也只能出现一个基本事件.另一种是若干基本事件的组合,称为复合事件.

例如,一枚骰子有6个面,分别刻有1点、2点、3点、4点、5点和6点."投掷一枚骰子"这一随机试验有6个基本事件:

出现1点;出现2点;出现3点;

出现4点;出现5点;出现6点.

每一次试验,必然出现也只能出现上述6种基本事件中的一种."出现偶数点"则是一个复合事件,它是由"出现2点"、"出现4点"、"出现6点"这3个基本事件组成的.

为了统一起见,我们把不可能发生的和必然要发生的结果也称为事件.例如,掷一枚骰子的试验中,"出现的点数不超过6"是必然要发生的,称它为必然事件;而"出现11点"则是不可能发生的,称它为不可能事件.

随机现象是否也有某种规律呢?仍以掷一枚钱币为例,掷一次钱币的结果是正面向上还是反面向上,似乎并无什么规律可言.但直觉和经验又告诉人们,出现正面向上或反面向上的机会是相等的.历史上有人作过掷钱币的试验:

试验人	掷钱币次数	出现正面向上次数	正面向上百分比
迪摩根	2048	1061	0.5180
蒲　丰	4040	2048	0.5069
皮尔逊	12000	6019	0.5016
皮尔逊	24000	12012	0.5005

从上表看出，做少数几次试验时，也许并不能显出什么规律性，但随着试验次数的增加，就显出了规律性：出现正面向上的次数与试验总次数之比越来越接近于 0.5，在 0.5 的左右摆动.

设一个随机试验在 n 次重复中，事件 A 共发生了 m 次（$0\leqslant m\leqslant n$），则称 m/n 为 A 发生的频率，n 称为试验总数，m 称为 A 的频数. A 的频率记作

$$W(A)=m/n$$

当试验次数 n 很大时，A 的频率 $W(A)$ 总是稳定在某一常数左右摆动，而偏离的可能性很少. 这个性质称为频率的稳定性.

定义 7.1.1　随机事件 A 的频率 $W(A)$，稳定在一个常数左右摆动，这个常数称为事件 A 的概率，记作 $P(A)$.

频率与概率的区别在于：随机事件 A 的频率 $W(A)$ 与试验有关，而概率 $P(A)$ 则是一个与试验无关的常数. 例如，上表中掷钱币的试验，“出现正面向上”这一事件 A，对迪摩根的试验，其频率 $W(A)=0.5180$，而对于蒲丰的试验，其频率则为 $W(A)=0.5069$，而其概率则是与试验无关的常数 0.5.

对于随机事件 A 的概率 $P(A)$，显然具有下列性质：

(1)对任何随机事件 A，$0\leqslant P(A)\leqslant 1$；

(2)对不可能事件 $\varnothing$，$P(\varnothing)=0$；

(3)对必然事件 U，$P(U)=1$.

尽管随机事件 A 的概率 $P(A)$是一个客观存在的常数，但在一般情况下，$P(A)$的值很难实际直接计算出来，只能通过试验取其频率作为其近似值，即

$$P(A)\approx W(A)$$

但是，有一类特殊的随机试验——有限等可能随机试验. 其概率比较容易计算. 仍以投掷一枚骰子为例说明这种随机试验的两个显著的特点. 第一，基本事件只有有限个. 对掷一粒骰子说是 6 个，即出现 1 点，2 点，3 点，4 点，5 点和 6 点；第二，如果骰子的形状是标准的立方体，而且材料均匀，我们就有理由认为，6 个基本事件出现的可能性大小是一样的.

我们给出下面的

定义 7.1.2 如果一种随机试验具有性质：

(1)只有有限个基本事件 $\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n$；

(2)每一个基本事件的发生都是等可能的. 即

$$P(\omega_1)=P(\omega_2)=\cdots=P(\omega_n)$$

则称为古典型随机试验，简称古典概型.

本书只研究古典概型. 以下所说的各条定义、定理都是对古典概型而言的.

定义 7.1.3 设一个古典概型共有 N 个基本事件，其中有 m 个对事件 A 的发生是有利的，则称 m/N 为事件 A 的概率. 记为

$$P(A)=m/N$$

或者

$$P(A)=\frac{\text{有利于 } A \text{ 的基本事件数}}{\text{基本事件的总数}}$$

例如，在掷一枚骰子的试验中，基本事件的总数 $N=6$. 对于事件 $A=$(出现偶数点)来说，有利于 A 发生的基本事件有 3 个

(即 2 点、4 点、6 点),所以 $P(A)=3/6=1/2$.

例题 7.1.1 依据唐代《仪礼正义》中的介绍,古人利用《周易》进行占筮,有一种用掷钱来得到一个卦的方法.其具体办法是:同时抛掷 3 枚铜钱,铜钱分为正反两面,当朝上的面是

两正一反时,称为少阳,取阳爻"—";

两反一正时,称为少阴,取阴爻"--";

三个反面时,称为老阳,取阳爻"—",但是变爻,也可变为阴爻;

三个正面时,称为老阴,取阴爻"--",也是变爻,即可变为阳爻.

掷钱得卦的试验是一种古典概型,它的基本事件共有 8 个,即

ω_1——第一枚正,第二枚正,第三枚正;

ω_2——第一枚正,第二枚正,第三枚反;

ω_3——第一枚正,第二枚反,第三枚正;

ω_4——第一枚反,第二枚正,第三枚正;

ω_5——第一枚正,第二枚反,第三枚反;

ω_6——第一枚反,第二枚正,第三枚反;

ω_7——第一枚反,第二枚反,第三枚正;

ω_8——第一枚反,第二枚反,第三枚反.

对于 A="出现少阳"这一事件,有利于 A 的基本事件有 3 个,即 $\omega_2,\omega_3,\omega_4$.所以,$P(A)=3/8$.令 B="出现阴爻"这一事件,有利于 B 的基本事件有 $\omega_1,\omega_5,\omega_6,\omega_7$4 个,故 $P(B)=4/8=1/2$.令 C="出现变爻"这一事件,有利于 C 的基本事件有 $\omega_1,\omega_8$2 个,故 $P(C)=2/8=1/4$.

例题 7.1.2 考古学家张政烺先生指出甲骨文中的奇字(一种由 6 个符号组成的字如"一 ⊠ ∧ ∧ ∧ 十")就是易卦,它起

源于古代数占法的记录. 换句话说，一、X、∧，十等都是数字，它们是占筮时所得的筮数. 奇字中共发现 6 个不同的数字.

一(一)，X(五)，∧(六)，十(七)，)((八)，ㄅ(九).

张政烺先生对他搜集到的 33 个奇字进行了统计，这些奇字中有些残缺不全的 6 爻卦和一些 3 爻卦，共 173 爻，各个数字出现的频率如下：

数字符号	—	X	∧	+	X	ㄅ
出现次数	36	11	64	33	24	0
出现频率	21%	6%	40%	19%	14%	0

不少易学家对“奇字”即数占记录之说持谨慎态度，认为“此说似乎尚有可商之处”. 可以肯定，如果奇字是数占法的记录，必不是《周易·系辞》中所说的筮法，即(4,12,1,2,1,3)广义筮法. 因为这种筮法只有 4 个筮数而不可能有 6 个筮数. 并且奇字所用筮法也不可能是任何广义筮法. 因为广义筮法所得的筮数都是连续的整数，而这里的筮数却是“一、五、六、七、八、九”等 6 个不连续的整数. 即使是连续的整数，通过概率计算，也可断言不可能是任何广义筮法的记录.

例如，假定奇字用的是某种广义筮法. 不妨假定 $l=r$，符合定理 5.2.1(筮法定理)的条件 A，筮数的个数为 $n(k-1)+1=6$，则得 $n(k-1)=5$. 这只有两种可能：$n=1,k=6$，或 $n=5,k=2$. 对于 $n=5,k=2$ 这种广义筮法，各筮数出现的概率计算在下一节讨论. 先看 $n=1,k=6$ 这种筮法所得的筮数出现的概率. 这时筮数的取值范围是

$$q-nk\leqslant\theta_n\leqslant q-n$$

试取 $m=8,q=11,r=l=1,k=6,n=1$，则所得筮数为

$$5,6,7,8,9,10$$

与奇字中的筮数较为接近. 我们来计算各个筮数出现的概率.

根据上一章例题 6.3.1，设开始策数 $8\times11+r$ 分成了 $R_1+r, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6$ 等 6 份，在第一份中“挂 r”之后，即得

$$88=R_1+R_2+R_3+R_4+R_5+R_6 \tag{1}$$

$$R_1=8q_1+r_1$$

$$R_2=8q_2+r_2$$

$$(1\leqslant r_i\leqslant 8, i=1,2,\cdots,6) \tag{2}$$

$$\cdots\cdots$$

$$R_6=8q_6+r_6$$

$$r_1+r_2+r_3+r_4+r_5+r_6=8t \quad (1\leqslant t\leqslant 6) \tag{3}$$

$$q_1+q_2+q_3+q_4+q_5+q_6=11-t \quad (1\leqslant t\leqslant 6) \tag{4}$$

6 个筮数就是

$$11-t \quad (t=1,2,3,4,5,6) \tag{5}$$

现在根据例题 6.3.1 提供的数据来计算 6 个筮数的概率.

基本事件的总数即为(1)的分拆数，它等于

$$C_{87}^5=36949857$$

对出现 $t=1$ 有利的基本事件是 $d_1=a_1b_1=63063$，所以，筮数 $11-1=10$ 出现的概率为

$$P(11-1)=P(10)=\frac{63063}{36949857}=0.017$$

同理，可计算出

$$P(11-2)=P(9)=\frac{d_2}{C_{87}^5}=\frac{5759754}{36943857}=0.157$$

$$P(11-3)=P(8)=\frac{d_3}{C_{87}^5}=\frac{20522502}{36943857}=0.555$$

$$P(11-4)=P(7)=\frac{d_4}{C_{87}^5}=\frac{10012464}{36943857}=0.271$$

$$P(11-5)=P(6)=\frac{d_5}{C_{87}^5}=\frac{591822}{36943857}=0.016$$

$$P(11-6)=P(5)=\frac{d_6}{C_{87}^5}=\frac{252}{36943857}=0.000$$

将各筮数出现的概率与频率表(*)比较,其差别太大,可见,"奇字"不大可能是某种数占法的记录.

例题 7.1.3 张政烺先生还提出过一种设想,"奇字"所用筮法可能是一种"上牌"筮法.这种筮法的程序是:

取 64 根蓍策,任意分成 4 组,其中第一组不用,称为"上牌".其余 3 组则分别称为上、中、下组,分别对应于一个经卦的上、中、下 3 爻.对每一组的策数分别揲之以 8,余数是奇数的就得阳爻,余数是偶数的就得阴爻.完成一道程序就得到一经卦,重复一次又得一经卦,重叠起来,便得到一个易卦.例如,设 64 分成了 7,16,30,11 等 4 组,7 作为"上牌",则

上组 $16=8\times1+8$——→偶数——→--

中组 $30=8\times3+6$——→偶数——→--

下组 $11=8\times1+3$——→奇数——→—

便得到震卦☳.这种筮法,共有 1,2,3,4,5,6,7,8 等 8 个筮数,试求各筮数出现的概率.

因为每一次分组都是 64 的一个计及次序的 4 分拆

$$64=R_0+R_1+R_2+R_3 \tag{1}$$

这种 4 分拆的总数,即基本事件的总数有

$$C_{63}^3=63\times62\times61/3!=238266 \tag{2}$$

考虑上组 R_1 的余数为 $r(1\leqslant r\leqslant8)$有利的分拆.当且仅当 $R_1\equiv r(\mathrm{mod}8)$时,分拆才会使 R_1"揲之以 8"后的余数为 r.

当 $R_1=r$,余下的 $64-r$ 作 3 分拆,有 C_{63-r}^2种不同的分拆;当 $R_1=8+r$,余下的 $56-r$ 作 3 分拆,有 C_{55-r}^2种不同的分拆;当 $R_1=8\times2+r$,余下的 $48-r$ 作 3 分拆,有 C_{47-r}^2种不同的分拆;余可类推.故有利于上组 R_1 的余数为 $r(1\leqslant r\leqslant8)$的分拆数为

$$C_{63-r}^2+C_{55-r}^2+C_{47-r}^2+C_{39-r}^2+C_{31-r}^2+C_{23-r}^2+C_{15-r}^2+C_{7-r}^2 \tag{3}$$

由(2)与(3),即得计算"上牌筮法"的筮数 r 出现的概率的公式:

$$P(r)=\frac{C_{63-r}^{2}+C_{55-r}^{2}+C_{47-r}^{2}+C_{39-r}^{2}+C_{31-r}^{2}+C_{23-r}^{2}+C_{15-r}^{2}+C_{7-r}^{2}}{C_{63}^{3}}$$

§7.2 概率的运算

与集合类似，事件与事件之间也有各种关系. 下面分别加以介绍：

(1)如果事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称事件 B 包含事件 A. 记为 $A\subset B$ 或 $B\supset A$.

例如掷一枚骰子，“出现奇数点”这一事件就包含“出现 3 点”这一事件.

(2)如果事件 A 与 B 互相包含，即 $A\subset B$，且 $B\supset A$，则称 A 与 B 等价或相等. 记作 $A=B$.

例如掷一枚骰子，“出现奇数点”与“不出现偶数点”是等价事件.

(3)事件的和. “事件 A 与事件 B 至少有一个发生”这一事件称为 A 与 B 的和. 记作 $A+B$.

例如掷一枚骰子，“出现大于 4 的点”这一事件是“出现 5 点”与“出现 6 点”两个事件的和.

(4)事件的积. “事件 A 与事件 B 同时发生”这一事件称为事件 A 与事件 B 的积. 记作 AB.

例如掷一骰子，A 为“出现偶数点”这一事件，B 为“出现大于 4 的点”这一事件，则 AB 就是“出现 6 点”这一事件.

(5)事件的差. 事件 A 发生而 B 不发生的事件称为 A 与 B 的差. 记作 $A-B$.

例如掷一枚骰子，记 A 为“出现偶数点”这一事件，B 为“出现 3 的倍数的点”，则 $A-B$ 即为“出现 2 点或 4 点”这一事件.

(5)互斥事件. 若两个事件 A 与 B 不能同时发生，则称 A 与

B 为互斥事件或不相容事件.

如果 n 个事件中任何两个事件都是互斥事件，就说这 n 个事件彼此互斥.

例如掷一枚骰子，“出现 3 点”与“出现 4 点”就是互斥事件. 任何一个随机试验的所有基本事件都是彼此互斥的. 显然，互斥事件 A 与 B 的积 AB 是不可能事件.

(7)对立事件. 若两事件 A 与 B 不能同时发生，但又必然有一个事件发生，则称 A 与 B 为对立事件. A 的对立事件记作 $\overline{A}$.

显然，两个对立事件的和是必然事件，而两个对立事件的积是不可能事件. 两个对立事件必然是互斥事件，但两个互斥事件不一定是对立事件. 例如掷一枚骰子，“出现偶数点”与“出现奇数点”是对立事件；“出现偶数点”与“出现 3 点”是互斥事件，但不是对立事件. 因为这两个事件虽不能同时发生，但却不一定必有一个发生，所以不是对立事件.

综上所述，我们可以把一个随机试验的全部事件与一个集合的全部子集相对应. 对应的方法如下表所示.

必然事件——全集；

不可能事件——空集；

基本事件——单元素子集；

随机事件——子集；

两个事件的和——两个子集的并；

两个事件的积——两个子集的交；

事件 A 包含事件 B——子集 A 包含子集 B；

相等事件——相等子集；

互斥事件——不相交子集；

对立事件——子集与它的补集.

因此，根据对应关系，子集的一些运算公式可以对应地推移到事

件的运算上来. 并且和集合的运算一样，可以推广到多个事件的运算上去. 例如，设事件 A 的对立事件为 $\overline{A}$，必然事件为 U，不可能事件为 $\varnothing$；集合 A 的补集为 A'，空集为 $\varnothing$，全集为 U，则对应地有

集合的运算	事件的运算
$A\cup A'=U$	$A+\overline{A}=U$
$A\cap A'=\varnothing$	$A\overline{A}=\varnothing$
$(A')'=A$	$\overline{(\overline{A})}=A$
$\varnothing'=U, U'=\varnothing$	$\overline{\varnothing}=U, \overline{U}=\varnothing$
$A\subset B\Leftrightarrow B'\subset A'$	$A\subset B\Leftrightarrow \overline{B}\subset\overline{A}$

现在我们提出古典概型的几个公式. 由于这些公式是普通的，可以在一般的概率论教材中找到它们的证明，故省略其证明.

定理 7.2.1 两个互斥事件的和的概率，等于这两个事件的概率的和. 即当 $AB=\varnothing$ 时，

$$P(A+B)=P(A)+P(B) \tag{1}$$

定理 7.2.2 有限个彼此互斥的事件之和的概率，等于这些事件的概率的和. 即若对 $1\leqslant i<j\leqslant n$，都有 $A_iA_j=\varnothing$，则

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n) \tag{2}$$

定理 7.2.3 两个对立事件的概率的和为 1，即

$$P(A)+P(\overline{A})=1 \tag{3}$$

定义 7.2.1 设 A 和 B 是两个随机事件，在事件 B 已经发生的条件下，A 发生的概率称为 A 在 B 发生下的条件概率，记作 $P(A|B)$.

例如掷一枚骰子，记“出现 2 点”的事件为 A，“出现偶数点”的事件为 B，则在 B 已发生的条件下，A 的条件概率为 $P(A|B)=1/3$. 但 $P(A)=1/6$. 可见，在一般情况下，$P(A)$ 与 $P(A|B)$ 的值是

不同的.

定理 7.2.4 两个事件的积的概率，等于其中一个事件的概率，与另一事件在第一事件已发生的条件下的条件概率之乘积. 即

$$P(AB)=P(A)P(B|A)=P(B)P(A|B) \tag{4}$$

定理 7.2.5 对于任意 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，有

$$\begin{aligned}&P(A_1A_2\cdots A_n)\\&=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})\end{aligned} \tag{5}$$

定理 7.2.6 设 A 与 B 是互斥事件，且 $P(A)>0,P(B)>0$，则

$$P(A|B)=P(B|A)=0 \tag{6}$$

定义 7.2.2 设 A,B 是两个随机事件，如果 $P(A)>0$，并且 $P(B|A)=P(B)$，则称事件 B 对于事件 A 是独立的.

很明显，这时 B 的概率与 A 是否发生没有关系.

定理 7.2.7 若事件 B 对事件 A 是独立的，则事件 A 对事件 B 也是独立的.

这个定理说明 A 与 B 的地位是对等的，所以，今后只说 A 与 B 相互独立即可.

定理 7.2.8 两个相互独立事件的积的概率等于这两个事件的概率的积，即

$$P(AB)=P(A)P(B) \tag{7}$$

定理 7.2.9 如果 A 与 B 是一对独立事件，那么下面 3 对事件

$$A\text{ 与 }\overline{B},\overline{A}\text{ 与 }B,\overline{A}\text{ 与 }\overline{B}$$

也是独立事件.

定理 7.2.10 设 A,B 是两个随机事件，则

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB) \tag{8}$$

公式(8)可以推广到 n 个事件上去：

$$\begin{aligned}&P(A_1+A_2+\cdots+A_n)\\&=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)\\&-P(A_1A_2)-P(A_1A_3)-\cdots-P(A_2A_3)-\cdots-P(A_{n-1}A_n)\\&+P(A_1A_2A_3)+P(A_1A_2A_4)+\cdots+P(A_{n-2}A_{n-1}A_n)\\&-\cdots\cdots\\&+(-1)^nP(A_1A_2\cdots A_n)\end{aligned}$$

定理 7.2.11(全概率公式) 设 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 是一组两两互斥的事件，即 $B_iB_j=\varnothing(1\leqslant i<j\leqslant n)$. 而事件 A 当且仅当 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 中之一发生时，它才能发生，即 $A=AB_1+AB_2+\cdots+AB_n$，则有下述公式：

$$\begin{aligned}P(A)=&P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)+\cdots\\&+P(B_n)P(A|B_n)\end{aligned}\tag{9}$$

定理 7.2.12(贝叶斯公式) 设 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 是一组两两互斥的事件，即

$$B_iB_j=\varnothing(1\leqslant i<j\leqslant n)$$

事件 A 当且仅当 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 中有一件发生，即

$$A=AB_1+AB_2+\cdots+AB_n$$

$P(A)>0,P(B_i)>0(i=1,2,\cdots,n)$. 则当事件 A 已发生的条件下，它是由 B_i 的发生引起的概率为

$$P(B_i|A)=\frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A|B_i)}\tag{10}$$

定理 7.2.13(贝努里公式) 设一种随机试验可以多次互相独立地进行，每次试验都只有两种可能的结果，即 A 和 $\bar{A}$. 其出现的概率为：

$$P(A)=p,P(\bar{A})=q,p+q=1$$

这种随机试验称为贝努里试验. 在 n 次贝努里试验中，A 恰好出现 k 次($0\leqslant k\leqslant n$)的概率为

$$P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k} \quad (k=0,1,\cdots,n) \tag{11}$$

例题 7.2.1 根据《系辞》的记载，古人进行占筮，揲蓍成卦的方法是这样的：

第一变：将实际用到的 49 策随意分成两部分，分握在左、右手中，在右手的一份中抽去 1 策. 然后分别对两手中的蓍策“揲之以 4”，即每 4 根一数，最后的“剩余”可能是 1 策、2 策、3 策或 4 策. 把两手“揲 4”的剩余连同原来抽出的 1 策一起去掉，共去掉 5 策或 9 策. 手中剩下的合起来不是 44 策就是 40 策. 这是第一变.

第二变：将第一变后剩下的 44 策或 40 策同样分成两部分，分握左、右手中，并在右手中去掉 1 策. 然后分别对两手中的蓍策每 4 策一数，最后的剩余为 1 策、2 策、3 策或 4 策. 将两手“揲 4”后的剩余连同原来抽掉的 1 策一起去掉，共去掉了 4 策或 8 策. 两手中剩下的蓍策为 40、36 或 32 策. 这叫做第二变.

第三变：在第二变后，对剩下的 40 策或 36 策或 32 策重复第二变的做法，又要去掉 4 策或 8 策，最后剩下的蓍策有 4 种可能：36 策、32 策、28 策或 24 策. 这称为第三变.

第三变后，将所剩蓍策用 4 除，求其商. 分别得到 9、8、7、6 等 4 个数字，称为筮数. 根据筮数的奇偶性得到阳爻或阴爻，作如下规定：

$36\div 4=9$，叫做老阳，取阳爻，但也可变成阴爻，故称为变爻；

$32\div 4=8$，叫做少阴，取阴爻，不变；

$28\div 4=7$，叫做少阳，取阳爻，不变；

$24\div 4=6$，叫做老阴，取阴爻，但也可变成阳爻，故称为变

交；

三变之后出现哪一个筮数，是一个随机事件，我们来计算它们的概率.

记第一变剩下 44 策这一事件为 A_{44}，剩下 40 策的事件为 A_{40}，则 A_{44} 与 A_{40} 为对立事件，即

$$A_{44}A_{40}=\varnothing, A_{44}+A_{40}=U$$

用记号 (a,b) 表示在右手中取掉 1 策以后，右手和左手中的策数分别为 a,b，并假定不出现 $a=0$ 或 $b=0$ 这种特殊情况，即 $1\leqslant a,b\leqslant 47, a+b=48$. 基本事件的集合有 47 个元素，即

$$(1,47),(2,46),(3,45),\underline{(4,44)},(5,43),$$
$$(6,42),(7,41),\underline{(8,40)},(9,39),(10,38),$$
$$(11,37),\underline{(12,36)},(13,35),(14,34),(15,33),$$
$$\underline{(16,32)},(17,31),(18,30),(19,29),\underline{(20,28)},$$
$$(21,27),(22,26),(23,25),\underline{(24,24)},(25,23),$$
$$(26,22),(27,21),\underline{(28,20)},(29,19),(30,18),$$
$$(31,17),\underline{(32,16)},(33,15),(34,14),(35,13),$$
$$\underline{(36,12)},(37,11),(38,10),(39,9),\underline{(40,8)},$$
$$(41,7),(42,6),(43,5),\underline{(44,4)},(45,3),$$
$$(46,2),(47,1)$$

其中有利于 A_{40} 的基本事件有 11 个（下面加横线者），所以

$$P(A_{40})=11/47$$
$$P(A_{44})=1-P(A_{40})=1-11/47=36/47$$

记第二变中剩下 40 策的事件为 B_{40}，剩下 36 策的事件为 B_{36}，剩下 32 策的事件为 B_{32}. 并记去掉 4 策这一事件为 D_4，去掉 8 策这一事件为 D_8.

(1)出现 B_{40} 只有一种可能途径，即在第一变中出现 A_{44}，并且在出现 A_{44} 的条件下再出现 D_4. 故

$$P(B_{40})=P(A_{44}D_4)=P(A_{44})P(D_4|A_{44})$$

我们来计算条件概率 $P(D_4|A_{44})$. 同样用(a,b)表示右手中去掉 1 策后，两手中的策数分别为 a,b，并且 $a\geqslant 1,b\geqslant 1$，则 $a+b=43$. 这时，基本事件有 21 种(因(a,b)与(b,a)各出现一次，可不分顺序合起来当作一个基本事件). 即

$$(1,42),(2,41),\underline{(3,40)},\underline{(4,39)},(5,38),$$
$$(6,37),\underline{(7,36)},\underline{(8,35)},(9,34),(10,33),$$
$$\underline{(11,32)},\underline{(12,31)},(13,30),(14,29),\underline{(15,28)},$$
$$\underline{(16,27)},(17,26),(18,25),\underline{(19,24)},\underline{(20,23)},$$
$$(21,22).$$

有利于 D_4 的基本事件有 11 个(下面未加横线者). 所以

$$P(D_4|A_{44})=11/21,P(D_8|A_{44})=10/21$$
$$P(B_{40})=P(A_{44})P(D_4|A_{44})=\frac{36}{47}\times\frac{11}{21}=\frac{7524}{18753}$$

(2)出现 B_{36} 有两条途径：在第一变中出现 A_{44}，然后在第二变中出现 D_8；或在第一变中出现 A_{40}，然后在第二变中出现 D_4，即

$$B_{36}=A_{44}D_8+A_{40}D_4$$

因为 $A_{44}D_8$ 与 $A_{40}D_4$ 是互斥事件，所以

$$P(B_{36})=P(A_{44}D_8)+P(A_{40}D_4)$$
$$=P(A_{44})P(D_8|A_{44})+P(A_{40})P(D_4|A_{40})$$

已知 $P(A_{44})=36/47,P(D_8|A_{44})=10/21,P(A_{40})=11/47$. 再只要计算出 $P(D_4|A_{40})$即可.

用(a,b)记两手中在右手去掉 1 策后的策数，并假设 $a\geqslant 1,b\geqslant 1,a+b=39$. 基本事件有 19 种：

$$(1,38),(2,37),\underline{(3,36)},\underline{(4,35)},(5,34),$$
$$(6,33),\underline{(7,32)},\underline{(8,31)},(9,30),(10,29),$$

(11,28),(12,27),(13,26),(14,25),(15,24),
(16,23),(17,22),(18,21),(19,20)

其中有利于 D_4 的基本事件有 10 个(下面未加横线者),所以

$$P(D_4|A_{40})=10/19, P(D_8|A_{40})=9/19$$

于是

$$P(B_{36})=\frac{36}{47}\times\frac{10}{21}+\frac{11}{47}\times\frac{10}{19}=\frac{9150}{18753}$$

(3)出现 B_{32} 也只有一种途径,即在第一变中出现 A_{40},在第二变中出现 D_8,即 $B_{32}=A_{40}D_8$.

$$P(B_{32})=P(A_{40}D_8)=P(A_{40})P(D_8|A_{40})$$
$$=\frac{11}{47}\times\frac{9}{19}=\frac{2079}{18753}$$

记第三变中出现剩下 36 策这一事件为 C_{36},剩下 32 策为 C_{32},剩下 28 策为 C_{28},剩下 24 策为 C_{24}. 去掉 4 策的事件为 E_4,去掉 8 策为 E_8. 则

(1)出现 C_{36} 只有一种可能途径,即在第二变中出现 B_{40},在第三变中出现 E_4,即 $C_{36}=B_{40}E_4$. 所以

$$P(C_{36})=P(B_{40}E_4)=P(B_{40})P(E_4|B_{40})$$

我们来计算 $P(E_4|B_{40})$,记号(a,b)的意义如前. 基本事件有 19 种,有利于 E_4 的有 10 种,所以,

$$P(E_4|B_{40})=10/19, P(E_8|B_{40})=9/19$$

从而

$$P(C_{36})=P(B_{40})P(E_4|B_{40})$$
$$=\frac{7524}{18753}\times\frac{10}{19}=\frac{3960}{18753}\approx 0.211$$

(2)出现 C_{32} 有两条途径:第二变出现 B_{40},且第三变出现 E_8;或者第二变出现 B_{36},第三变出现 E_4. 即

$$C_{32}=B_{40}E_8+B_{36}E_4$$
$$P(C_{32})=P(B_{40}E_8+B_{36}E_4)$$

$$=P(B_{40}E_8)+P(B_{36}E_4)$$

$$=P(B_{40})P(E_8|B_{40})+P(B_{36})P(E_4|B_{36})$$

我们来计算 $P(E_4|B_{36})$. 基本事件有 17 种：

(1,34),(2,33),(3,32),(4,31),(5,30),
(6,29),(7,28),(8,27),(9,26),(10,25),
(11,24),(12,23),(13,22),(14,21),(15,20),
(16,19),(17,18)

有利于 E_4 的基本事件有 9 种(下面未加横线者).

$$P(E_4|B_{36})=9/17, P(E_8|B_{36})=8/17$$

将 $P(B_{40})=7524/18753, P(E_8|B_{40})=9/19$

$P(B_{36})=9150/18753, P(E_4|B_{36})=9/17$

代入 $P(C_{32})$的表达式中，即得

$$P(C_{32})=\frac{7524}{18753}\times\frac{9}{19}+\frac{9150}{18753}\times\frac{9}{17}\approx 0.448$$

(3)出现 C_{28}也有两种途径：第二变出现 B_{36}，第三变出现 E_8；或者第二变出现 B_{32}，第三变出现 E_4. 即

$$C_{28}=B_{36}E_8+B_{32}E_4$$

$$P(C_{28})=P(B_{36}E_8)+P(B_{32}E_4)$$

$$=P(B_{36})P(E_8|B_{36})+P(B_{32})P(E_4|B_{32})$$

已知 $P(B_{36})=9150/18753, P(E_8|B_{36})=8/17, P(B_{32})=2079/18753$，只须要计算 $P(E_4|B_{32})$即可.

符号(a,b)的记号如前. 基本事件有 15 种：

(1,30),(2,29),(3,28),(4,27),(5,26),
(6,25),(7,24),(8,23),(9,22),(10,21),
(11,20),(12,19),(13,18),(14,17),(15,16)

有利于 E_4 的事件有 8 个，所以

$$P(E_4|B_{32})=8/15, P(E_8|B_{32})=7/15$$

将 $P(E_4|B_{32})=8/15$ 代入 $P(C_{28})$的计算公式得

$$P(C_{28})=\frac{9150}{18753}\times\frac{8}{17}+\frac{2079}{18753}\times\frac{8}{15}\approx 0.289$$

(4)出现 C_{24}只有一条途径:第二变后出现 B_{32},第三变时出现 E_8,即

$$C_{24}=B_{32}E_8$$

$$P(C_{24})=P(B_{32}E_8)=P(B_{32})P(E_8|B_{32})$$

$$=\frac{2079}{18753}\times\frac{7}{15}\approx 0.052$$

所以,我们得到:

出现阳爻的概率$=P(C_{36})+P(C_{28})$

$=0.211+0.289=0.500$

出现阴爻的概率$=P(C_{32})+P(C_{24})$

$=0.448+0.052=0.500$

出现变爻的概率$=P(C_{36})+P(C_{24})$

$=0.211+0.052=0.263$

例题 7.2.2 对开始用 $N_0=mq+1$ 策的$(m,q,1,2,1,3)$广义筮法中各筮数出现的概率,可将 3 变成爻的过程用"二叉树"表示如 p. 161 的图.

先看第一变的情形. $mq+1$ 策"挂一"之后,尚余 mq 策. 设 $mq=R_1+R_2$,则 R_1 中的数可以有 $mq-1$ 种取法.

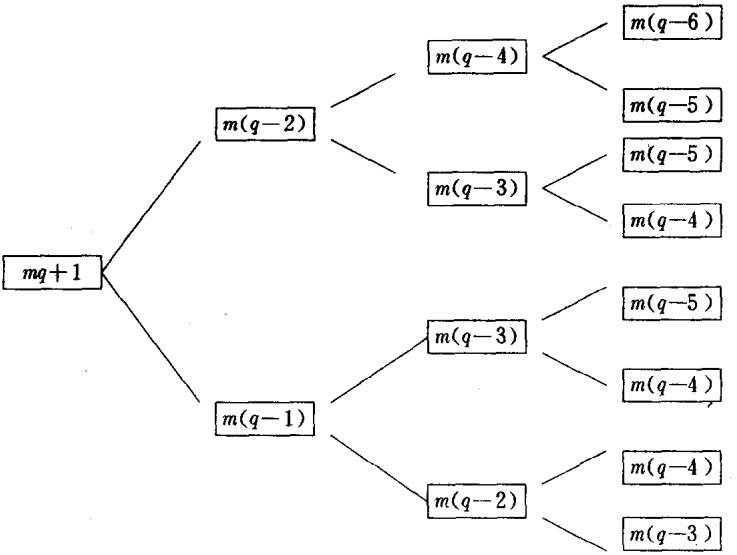
$$R_1:1,2,\cdots,m(q-1),\cdots,mq-1 \tag{1}$$

$$R_2:mq-1,mq-2,\cdots,m,\cdots,1 \tag{2}$$

取 R_1 中的数 $mp+i$,$0\leqslant p\leqslant q-1$($1\leqslant i\leqslant m$),且 $mp+i\leqslant mq-1$. 则 R_2 中与之相应的数为

$$m(q-p-1)+(m-i)$$

当 $1\leqslant i\leqslant m-1$ 时,我们可知 $1\leqslant m-i\leqslant m-1$,所以 $mp+i$ 与 $m(q-p+1)+(m-i)$用 m 除的余数分别为



$r_1=i, r_2=m-i$. 结果出现

$$N_1=N_0-(r_1+r_2+1)$$
$$=(mq+1)-[i+(m-i)+1]=m(q-1)$$

当 $i=m$ 时，$mp+m$ 与 $m(q-p-1)$ 两者“撰之以 m”的余数为 $r_1=r_2=m$，结果出现

$$N_1=N_0-(r_1+r_2+1)=(mq+1)-(m+m+1)=m(q-2)$$

在 R_1 的序列(1)中，m 的倍数出现 $q-1$ 次，所以出现 $m(q-2)$ 和 $m(q-1)$ 的概率分别为

$$P(m(q-2))=(q-1)/(mq-1) \tag{3}$$
$$P(m(q-1))=1-(q-1)/(mq-1)$$
$$=(m-1)q/(mq-1) \tag{4}$$

再看第二变以后的情况，其概率可以统一考虑. 设开始 $N_i=mt$ 策，经过第 $i+1$ 变后，出现 $N_{i+1}=m(t-2)$ 或 $N_{i+1}=m(t-1)$ 两种可能. mt 策“挂一”之后，余 $mt-1$. 设 $mt-1=R_1+R_2$，则

R_1 与 R_2 可分别取 $mt-2$ 个数：

$$R_1: 1,2,\cdots,m(t-1)-1,m(t-1),\cdots,mt-2 \tag{5}$$

$$R_2: mt-2,mt-3,\cdots,m,m-1,\cdots,1 \tag{6}$$

取 R_1 中的数 $mp+i(1\leqslant i\leqslant m,0\leqslant p\leqslant t-1)$，则 R_2 中相对应的数为 $m(t-p-1)+(m-1-i)$.

当 $1\leqslant i\leqslant m-2$ 时，我们有 $1\leqslant m-1-i\leqslant m-2$，故 $mp+i$ 与 $m(t-p-1)+(m-1-i)$“揲之以 m”的剩余分别为 $r_1=i,r_2=m-1-i$. 因此，在第 $i+1$ 变后，结果将出现

$$\begin{aligned}N_{i+1}&=N_i-(r_1+r_2+1)\\&=mt-(i+m-1-i+1)=m(t-1)\end{aligned}$$

在 R_1 的序列(5)中，有 $t(m-2)$ 个，写成 $mp+i(1\leqslant i\leqslant m-2)$ 后，可知 $N_{i+1}=m(t-1)$ 或 $N_{i+1}=m(t-2)$ 的概率分别为：

$$P(N_{i+1}=m(t-1))=t(m-2)/(mt-2) \tag{7}$$

$$\begin{aligned}&P(N_{i+1}=m(t-2))\\&=1-t(m-2)/(mt-2)=2(t-1)/(mt-2)\end{aligned} \tag{8}$$

根据公式(3)、(4)和(7)、(8)，利用概率的加法和乘法定理，即得各筮数出现的概率：

$$\begin{aligned}&P(N_3=m(q-6))\\&=\frac{q-1}{mq-1}\times\frac{2(q-3)}{m(q-2)-2}\times\frac{2(q-5)}{m(q-4)-2}\\&P(N_3=m(q-5))\\&=\frac{q-1}{mq-1}\times\frac{2(q-3)}{m(q-2)-2}\times\frac{(q-4)(m-2)}{m(q-4)-2}\\&\quad+\frac{q-1}{mq-1}\times\frac{(q-3)(m-2)}{m(q-2)-2}\times\frac{2(q-4)}{m(q-3)-2}\\&\quad+\frac{(m-1)q}{mq-1}\times\frac{2(q-2)}{m(q-1)-2}\times\frac{2(q-4)}{m(q-3)-2}\\&P(N_3=m(q-4))\end{aligned} \tag{9}$$

$$=\frac{q-1}{mq-1}\times\frac{(q-2)(m-2)}{m(q-2)-2}\times\frac{(q-3)(m-2)}{m(q-3)-2}$$
$$+\frac{q(m-1)}{mq-1}\times\frac{(q-1)(m-2)}{m(q-1)-2}\times\frac{2(q-3)}{m(q-2)-2}$$
$$+\frac{q(m-1)}{mq-1}\times\frac{2(q-2)}{m(q-1)-2}\times\frac{(q-3)(m-2)}{m(q-3)-2}$$

$$P(N_3=m(q-3))$$
$$=\frac{q(m-1)}{mq-1}\times\frac{(m-2)(q-1)}{m(q-1)-1}\times\frac{(q-2)(m-2)}{m(q-2)-1}$$

在(9)中，置 $m=4,q=12$，即得到在例题 7.2.1 中直接计算出的 4 个筮数的概率.

例题 7.2.3 “揲蓍成卦”的过程，可以看成一个 6 次贝努里试验，它的每次试验有两种对立的结果：出现阳爻或出现阴爻. 并且出现阳爻与阴爻的概率分别为

$$P(\text{阳})=1/2,P(\text{阴})=1/2$$

所以，根据贝努里公式：

出现“0 阳卦”的概率

$$P(0)=C_6^0\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{1}{64}$$

出现“1 阳卦”的概率

$$P(1)=C_6^1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{6}{64}$$

出现“2 阳卦”的概率

$$P(2)=C_6^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{15}{64}$$

出现“3 阳卦”的概率

$$P(3)=C_6^3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{20}{64}$$

出现“4 阳卦”的概率

$$P(4)=C_6^4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{15}{64}$$

出现“5 阳卦”的概率

$$P(5)=C_6^5\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{6}{64}$$

出现“6 阳卦”的概率

$$P(6)=C_6^6\left(\frac{1}{2}\right)^6\left(\frac{1}{2}\right)^0=\frac{1}{64}$$

这一过程还可以看成另外的一种贝努里试验. 每次试验出现两种对立的结果之一：出现变爻和不出现变爻. 根据例题 7.2.1 的计算结果，它们的概率分别是

$$P(\text{变})=0.263,P(\text{不变})=1-0.263=0.737$$

所以，根据贝努里公式：

出现“0 爻变”的概率

$$P(0)=C_6^0(0.263)^0(0.737)^6=0.160$$

出现“1 爻变”的概率

$$P(1)=C_6^1(0.263)^1(0.737)^5=0.343$$

出现“2 爻变”的概率

$$P(2)=C_6^2(0.263)^2(0.737)^4=0.306$$

出现“3 爻变”的概率

$$P(3)=C_6^3(0.263)^3(0.737)^3=0.146$$

出现“4 爻变”的概率

$$P(4)=C_6^4(0.263)^4(0.737)^2=0.039$$

出现“5 爻变”的概率

$$P(5)=C_6^5(0.263)^5(0.737)^1=0.006$$

出现“6 爻变”的概率

$$P(6)=C_6^6(0.263)^6(0.737)^0=0.000$$

§7.3 数学期望

先从一个具体的实例开始.

设有甲、乙两个学生参加数学竞赛，竞赛有 3 道试题，他们

能解出的题数的概率如下表所示：

解出的题数	0	1	2	3
甲解出的概率	0.2	0.2	0.3	0.3
乙解出的概率	0	0.3	0.5	0.2

试问这两个学生谁获胜的机会较大呢？

从表上很难判断两人谁获胜的机会大些，但通过一些计算就能判断. 设想类似的竞赛进行了 100 次，则由上表知道，甲约有 20 次未做出 1 题，20 次做出 1 个题，30 次做出 2 个题，30 次做出 3 个题. 100 次共做出

$$0\times20+1\times20+2\times30+3\times30=170(\text{题})$$

平均每次做出

$$170\div100=1.7(\text{题})$$

同理可算出，乙在 100 次中共做出

$$0\times0+1\times30+2\times50+3\times20=190(\text{题})$$

平均每次做出

$$190\div100=1.9(\text{题})$$

由于乙平均每次能做出 1.9 题，而甲只能做出 1.7 题，故乙获胜的机会要大一些.

把上述计算平均解出题数的式子改写为

$$\text{甲平均解出题数}=0\times0.2+1\times0.2+2\times0.3+3\times0.3$$

则这个平均解出题数恰好等于解出题数与解出这些题的概率的乘积之和. 在概率统计中称这种平均数为数学期望.

定义 7.3.1 设一个随机试验的结果是用某一数字表示的，它的 n 种可能结果的数字是

$$x_1, x_2, \cdots, x_n$$

而出现这些数字结果的概率分别为

$$p_1, p_2, \cdots, p_n$$

即出现 x_i 的概率为 $p_i(i=1,2,\cdots,n)$，则

$$E=p_1x_1+p_2x_2+\cdots+p_nx_n=\sum_{i=1}^{n}p_ix_i$$

称为随机试验的数学期望.

例题 7.3.1 在《系辞》规定的揲蓍成卦方法中，做一次“试验”，可能出现的变爻个数为

$$0,1,2,3,4,5,6$$

根据例题 7.3.3，它们出现的概率分别为

$$0.160,0.343,0.306,0.146,0.039,0.006,0.000$$

所以，在每一次揲蓍成卦时，出现变爻数的数学期望为

$$E=0\times0.160+1\times0.343+2\times0.306+3\times0.146$$
$$+4\times0.039+5\times0.006+6\times0.000\approx1.679$$

即多次成卦中，平均每卦出现变爻约 1.7 个.

例题 7.3.2 在《左传》、《国语》中记录了古人用易卦占筮的实例，共记录 16 卦，其中 14 卦包含有变爻.

出现 0 个变爻的概率为 0.160，故在 16 次占筮中出现 0 个变爻的卦的数学期望为

$$E_0=1\times0.160+1\times0.160+\cdots+1\times0.160$$
$$=0.160\times16=2.560$$

同理可算出出现 k 个($k=1,2,3,4,5,6$)变爻的卦的数学期望 E_k 分别为

$$E_1=0.343\times16=5.488$$
$$E_2=0.306\times16=4.896$$
$$E_3=0.146\times16=2.336$$
$$E_4=0.039\times16=0.264$$
$$E_5=0.006\times16=0.096$$
$$E_6=0.000\times16=0.000$$

这意味着，在16次占筮中，0个变爻的卦约出现2～3次；1个变爻的卦约出现5～6次；2个变爻的卦约出现5次，3个变爻的卦约出现2次，4个变爻的卦不超过1次，5爻变或6爻变的卦基本不出现.

第八章　数学在易学研究中的应用

天下同归而殊途，一致而百虑.

——《周易·系辞》

在以上各章中，我们简明扼要地介绍了与《周易》有关的一些数学知识. 正像我们在绪论中所说明的那样，本书的主要目的不是通过《周易》来研究数学，而是利用现代数学的方法去研究《周易》的某些课题. 在这一章中，我们将利用数学方法对易学研究中一些悬而未决的难题进行新的探讨. 这些问题包括：易卦的起源问题，卦序排列问题，象数之学问题，大衍之数问题，等等. 通过数学方法，对于某些问题将得出迥异于前人的结论.

§8.1　论易卦的起源

《周易》是一部什么样的书？易卦是怎样产生的？它与《周易》经文是什么关系？无疑是易学研究中最根本最重要的问题. 这个问题的解决，涉及对《周易》的根本理解，但长期以来聚讼纷纭，迄无定论.

一、关于易卦起源的说法

关于易卦的起源，有种种传说和臆测，可谓众说纷纭，莫衷一是. 下面只介绍几种有代表性的看法：

1. 法象说　这种说法以《易传》为代表，是历代易学思想的主流. 法象说认为易卦起源于对天地法象的描述.《系辞》说："古者包牺氏之王天下也，仰则观象于天，俯则观法于地，观鸟兽之文，与地之宜，近取诸身，远取诸物，于是始作八卦，以通神明之德，以类万物之情."《说卦》说："昔者圣人之作《易》也，将以顺性名之理，是以立天之道，曰阴与阳；立地之道，曰柔与刚；立人之道，曰仁与义. 兼三才而两之，故《易》六画而成卦."可以作为此说的代表. 持这种观点的人认为：易卦的 64 卦是由 8 经卦两两重叠而成，而 8 经卦则表示天、地、雷、风、水、火、山、泽等自然现象. 或者是反映天、地、人之间的关系的象征.

2. 结绳说　无论是在亚洲、非洲和美洲的古代，都有结绳记事的传说.《系辞》说："上古结绳而记，后世圣人易之以书契."古埃及文字中某些字母的形状都与结绳有关. 因此，有的学者认为，易卦是古代结绳记事的符号化. 鲁迅先生也有过这样的推论："伏羲皇上的'八卦'之流，三条绳一组，都不打结的是'乾'，中间各打一结的是'坤'."①

3. 数占说　这种观点是由张政烺先生在 1978 年首先提出的. 张政烺先生考证了甲骨上的"奇字"，认为它就是数占法的记录. 奇字是由一些据说是数字的符号组成的，把奇数当阳爻"—"，偶数当阴爻"--"，三个数一组便得到 8 经卦中的某一卦，6 个数一组便得到 64 别卦中的某一卦②. 如图 8.1.1 所示.

数占说因有出土文物作根据，比较容易令人接受.

当然，易卦的起源还有另外一些说法. 不过，或者与上述三种说法基本相同. 或者因缺乏根据，难以令人信服，故不再一一.

① 鲁迅：《且介亭杂文·门外文谈》，人民文学出版社，1973 年版.

② 张政烺：《试释周初青铜器铭文中的易卦》，《考古学报》，1980 年第 4 期.

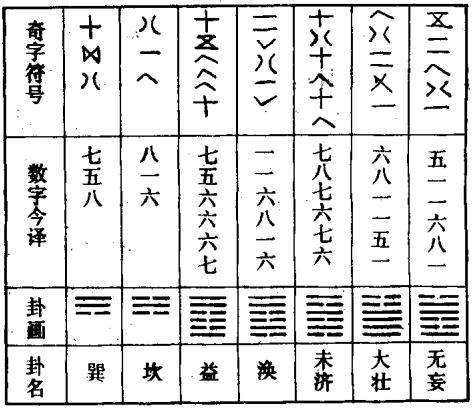


图 8.1.1

列举. 对于上述三种说法，本节后面还要略加评说.

二、易卦是思维决策的数学模型

笔者认为：易卦起源于古人研究思维决策的数学模型.

在本书第三章中已经谈到，易卦与 6 维布尔向量存在着同构对应关系. 在易卦中任取一个卦，例如恒卦䷟，如果用数字 1 来代替阳爻“—”，用数学 0 来代替阴爻“--”，并把从下到上的顺序改为从左到右的顺序，就成为一个 6 维布尔向量

䷟—→(0,1,1,1,0,0)

反过来，任给一个 6 维布尔向量就对应一个卦. 如

(1,0,0,1,1,1) —→䷸(无妄卦)

因此，中国古老的易卦就是 6 维布尔向量的原型.

布尔向量是近代数学的一个重要概念，它被广泛地采用为描述那些具有两种对立状态的事物的数学模型. 布尔向量虽然是近代数学的概念，而且发明于西方，但它的思想起源很古，而且结构简单，与易卦完全相同. 人同此心，物同此理. 我们有理由认为，易卦起源于古人用以描述具有两种对立状态的事物的符

号，最后发展为研究思维决策的数学模型.

古人在复杂的社会生活中，不可能不遇到决策的问题.这里所说的决策是一个较为广泛的概念，诸如形势分析、目标控制、行动方案、后果预测，等等，都可以包括进去.对于一些多因素的决策系统，涉及的因素虽然千差万别，但每种因素大致可以表现为两种对立的状态，如生克、动静、高低、胜负、兴衰、强弱、进退、向背等等.而两种对立状态又大致可归结为对人们所考虑的决策系统有利还是不利(或者说是吉还是凶).古人在研究较为复杂的决策系统时，有时不能不作一些记录.在纸笔还没有问世的古代，记录是很困难的."上古结绳而治，后世圣人易之以书契".从结绳记事到文字记事，中间有一个用符号记事的过程，而且被长期保留下来了.因此，人们在研究决策系统时，会采用两种不同的符号来记录系统中诸因素两种对立的状态，这种做法即使在今天也被人们广泛地采用.如果古人采用符号"—"表示因素对系统有利的状态，用符号"--"表示因素对系统不利的状态，那么，记录的结果就必然是一个卦.特别地，对于三因素的决策系统，就得到8经卦中的一个卦；对于6因素的决策系统，就得到一个易卦.

现列表说明如下：

1.一个因素的决策系统有两种状态：

因素状态	有利	不利
决策系统模型	—	--
《周易》中的名称	阳爻	阴爻

2.两个因素的决策系统有4种状态：

因素名称	第二因素	有利	不利	有利	不利
	第一因素	有利	有利	不利	不利
决策系统模型		⚌	⚎	⚍	⚏
《周易》中的名称		太阳	少阴	少阳	太阴

3.3个因素的决策系统有8种状态：

因素状态	第三因素	有利	不利	有利	不利	有利	不利	有利	不利
	第二因素	有利	有利	不利	不利	有利	有利	不利	不利
	第一因素	有利	有利	有利	有利	不利	不利	不利	不利
决策系统模型		☰	☱	☲	☳	☴	☵	☶	☷
《周易》中的名称		乾	兑	离	震	巽	坎	艮	坤

我们熟悉的田忌赛马的故事，就是一个典型的3因素决策问题. 田忌与齐王各出3匹马比赛，已知田忌的上马不如齐王的上马，但却胜过齐王的中马和下马；田忌的中马不如齐王的上马和中马，但却胜过齐王的下马；田忌的下马不敌齐王的任何一种马. 如果齐王的马出场的次序是上马、中马、下马，田忌应该怎样安排自己3种马的出场顺序才合理呢？孙膑帮助田忌分析了各种可能的安排，一共有6种不同的方案. 如果用“—”表田忌获胜，“--”表田忌失利，把6种方案记录下来就如下表所示：

比赛场次	齐王的马出场次序	田忌可选择的对策					
		1	2	3	4	5	6
第三场	下马	下马	中马	下马	上马	上马	中马
第二场	中马	中马	下马	上马	下马	中马	上马
第一场	上马	上马	上马	中马	中马	下马	下马
决策系统模型		☷	☷	☷	☷	☷	☰

最有利的是方案6，最不利的是方案1，田忌正确地选择了方案6，结果两胜一负.

《曹刿论战》可以作为另一个例子，齐国军队侵伐鲁国，鲁庄公准备迎战．曹刿问鲁庄公凭什么来打赢这场战争．他们共同分析了鲁国能否与齐国一战的3个重要因素：民心、天命和政治．他们得出了不同的评价．

对于民心，鲁庄公认为他"衣食所安，弗敢专也，必以分人．"民心对他有利．曹刿则认为"小惠未遍，民弗从也．"并非有利．

对于天命，鲁庄公认为他"牺牲玉帛，弗敢加也，必以信"，也是有利因素；曹刿则认为"小信未孚，神弗孚也"，是不利因素．

对于政治，鲁庄公说他"小大之狱，虽不能察，必以情"．是有利因素．对这一点，曹刿的看法与鲁庄公是一致的，认为是"忠之属也，可以一战"．

因素	鲁庄公的评价	曹刿的评价
3.政治	—	—
2.天命	—	--
1.民心	—	--
决策系统模型	☲	☲

可见，一切3因素的决策系统都可用一个3爻卦来描述它的基本状态．古人考虑的问题很多是3因素的，如"天时、地利、人和"，"过去、现在、将来"，"上、中、下"，等等．因此，似乎可以断言，8经卦是古人研究3因素决策系统的模型．随着社会的发展，人们的社会活动越来越丰富，需要考虑的决策系统也越来越复杂．有的系统要分解成两个3因素的小系统来考虑；或者分成两步，每一步都是一个3因素的系统．这样，就出现了6因素的决策系统，相应的记录符号就成了易卦中的6爻卦．

一个6爻卦所表示的决策系统模型，虽然只有6个因素，但却是错综复杂，变化无穷的．

(1)必须有抽象的观点．阳爻与阴爻代表一个事物的两个对

立面，事物本身就是多种多样的．它可以是人，也可以是物；可以是自然现象，也可以是社会现象；可以是过去的，也可以是未来的．同一事物的两个对立面，也可以从不同的侧面提取．变化无穷，不可能把一个卦囿于某一具体的事例．

(2)必须有系统的观点．虽然一个卦只有 6 个因素，但它们不是孤立的，它们组成一个系统，因素之间的不同组合形式会使系统产生不同的效应．一个 6 爻卦还可以分解成一些较少爻数的卦的组合，即一个大系统可以分解成一些子系统．

一个爻或几个爻的性质可能又要另外的若干因素来决定，于是卦中有卦，一级系统下面还可能有二级系统、三级系统……

(3)必须有矛盾的观点．6 个爻的地位不能等量齐观，每个爻的作用也不可能一成不变．有时要特别突出某爻或某几个爻，即系统中有所谓主要矛盾．

一个爻的两个对立面，也并不是总处于对等的地位，各以 1/2 的概率发生作用，必然有轻有重，即有所谓矛盾的主要方面和次要方面．

(4)必须有变化的观点．每一个因素有利或不利，固然是质的差别，但有利或不利的程度，还有量的区别．同一个因素，在甲系统中有利，在乙系统中却可能不利；在今天有利，明天却可能不利；对局部有利，对全局却可能不利．

总之，“易者，变易也．”“非天下之至变，孰能与如此？”“知变化之道者，其知易之所为乎？”“易之为书也不可远，为道也屡迁，变动不居，周流六虚，上下无常，刚柔相易，不可为典要，唯变所适．”一个卦描述一个 6 因素的系统，决策者对每个因素不仅要做定性分析，也要作定量分析、权衡，计算它们的综合效应，它与现代数学中的布尔向量起着完全相似的作用．所以．易卦是古人研究决策系统的数学模型．

三、 进一步的论证

从易卦的结构分析，可以断言它可作为研究决策系统的模型，但从逻辑上讲，并不等于说易卦就必然起源于古人研究决策系统的模型. 一个命题是真的，它的逆命题却不一定是真的. 这里的情况如何呢？还必须用另外的材料来进一步论证.

1. 最可信的材料是回到《易经》本身中去寻找. 将《易经》的爻辞与相应的卦爻比较，凡对应于阳爻的爻辞多半有“利”、“吉”、“无咎”等断语；对应于阴爻的爻辞多半有“不利”、“凶”、“有悔”等字样. 如上经 30 卦中共有阳爻 86 个，对应的 86 条爻辞中有“吉”、“无咎”、“利”等断语的有 60 条，占 71%；属于中性的有 15 条，占 21%；明确地有“凶”、“悔”、“不利”等字样的只有 7 条，仅占 8%. 而且由于有利和不利的相对性，有些“凶”、“厉”等断语的爻辞是在特定的语言环境中说的，对某一局部不利而用断语“凶”，却可能对整个系统的全局有利. 如《噬嗑》卦上九爻辞“何校灭耳，凶.”上九阳爻而用断语“凶”，似乎与上面的结论矛盾. 但《噬嗑》卦是一个讲决狱执刑的卦，罪犯不能防微杜渐，终于罪至罔加，带上了沉重的枷锁，凶多吉少！对罪犯说，固然是凶险，但对决狱系统来说，是执法的成功，应为有利. 因此，根据爻辞与卦画的关系，从数理统计的角度分析，我们有理由断言，阳爻“—”是记录有利条件的符号，阴爻“--”是记录不利条件的符号.

2. 从《易经》经文的内容看，也确实是讲思维决策的. 试举“坤卦”与“同人卦”等的卦爻辞为例：①

坤第二

䷁坤：元亨，利牝马之贞，居子有攸往，先迷，后得主. 利西

① 欧阳维诚：《周易新解》，岳麓书社 1990 版.

南，得朋，东北丧朋．安贞吉．

初六　履霜，坚冰至．

六二　直、方、大．不习，无不利．

六三　含章可贞．或从王事，无成有终．

六四　括囊，无咎无誉．

六五　黄裳，元吉．

上六　龙战于野，其血玄黄．

用六　利永贞．

坤卦的6个爻都是阴爻，描述的是一个所有因素都处于不利状态下（当然，不利有程度之别）的系统．不利条件是可以转化的，问题在于采取正确的策略．且看坤卦的爻辞是怎么说的：

初六说，已经踩在霜上，坚冰即将到来．提醒人们对不利条件要有足够的估计．“冰冻三尺，并非一日之寒．”当前已经不利，短暂的将来也未可乐观．但是，坚冰到了，春天还须久待吗？不利条件还是可以转化的．在不利条件下，要保持做人的正直、端方、豁达大度，保持了这些美好的德行，虽不能拚搏出击，但合于正道；做事业暂时没有成就，但将来还会有好结果．六二、六三讲的是抽象的道理，六四、六五则是更具体的策略．六四讲在不利条件下要保持沉默，不宜轻举妄动，虽然不能得誉，但是可避免不必要的灾咎．六五的黄裳指代士人（《仪礼·士昏疏》：“士唯有三色之裳：玄裳、黄裳、杂裳．”用黄裳指代士人，犹言布衣之指平民）．这条爻辞说，在不利条件下，要寻求、依靠智谋之士．古人重士，认为得士是转化不利形势的重要保证．最后，上六爻辞的龙指坤卦的对立面．因为乾卦与坤卦是两个互反的卦，阳盛阴衰，阴盛阳衰．乾卦有利则坤卦不利，乾卦不利则坤卦有利．在乾卦中是“飞龙在天”，乾卦处于极盛，就是使坤卦陷于不利的外部因素．现在，这些龙已互相残杀，血水横流，两败俱伤，到了“亢龙有

悔”的地步.比喻坤卦的不利终于出现了转化的契机.很明显,坤卦提出的正是在不利条件下的对策:保存实力,静观待变.

同人第十三

䷌同人:同人于野,亨,利涉大川,利君子贞.

初九　同人于门,无咎.

六二　同人于宗,吝.

九三　伏戎于莽,升其高陵,三岁不兴.

九四　乘其墉,弗克攻,吉.

九五　同人先号咷而后笑,大师克相遇.

上九　同人于郊,无悔.

《同人》卦有5个阳爻,只有“六二”一个阴爻.这个卦所描述的系统,从总体看有利因素多于不利因素.但不能简单地认为,有利条件与不利条件之比是5∶1.因为有一个不利因素“六二”横阻于前,可能与“初九”形成强烈对抗.如果“初九”胜过“初六”,将为系统打下良好的基础,奠定今后一帆风顺的局面.反之,如果“六二”压倒“初九”,就会给整个系统带来基础不稳的局面,使整个系统的优势受到限制或削弱,难以充分发挥.

《同人》卦讲的是敌人入侵时,如何动员民众,保家卫国的故事.“同人”指聚集民众.“初九”和“六二”摆出了一对尖锐的矛盾:在国家遭到强大的敌人入侵时,君王是“同人于门”还是“同人于宗”呢?即君王是在王门(门,指王门.《周礼·司徒》:“若国有大故,则致万民于王门”.)动员民众起来抗战呢?还是只限于在王族宗室内部动员呢?这不仅是两种战略思想的斗争,也是全国人心向背的反应.前者利而后者凶.九三爻辞则提出了具体的作战方案.敌军远道入侵,利于速战.我方应暂避其锋,埋伏军队,抢占地形,以逸待劳,不主动出击.九四爻辞讲敌军乘势而来,先头部队有可能冲上城头,但我已有备无患,顽强拒守,后发

制人，敌军不利久战，攻而弗克，终于退走．九五爻辞描写战士的心态，当初出征时，敌强我弱，广大军民告别父母妻儿，奔赴前线，生离死别之痛，家亡国破之忧，难免失声痛哭；如今胜利会师，国家从此太平，亲人即将团聚，又怎能不开怀大笑．上九爻辞讲凯旋之后，君王在郊外聚集军民庆祝胜利，祭祀天地．全卦脉胳清楚，层次分明．前两爻讲战前决策，中间两爻讲战中斗智，后两爻讲善后工作．《同人》卦的思维模式与我国历史上以弱胜强的著名战例"齐鲁长勺之战"，可谓异曲同工．曹刿为鲁庄公克敌制胜的"远谋"，归纳起来主要是两点：全民战争，以逸待劳．曹刿的思想就有可能来自《同人》卦．

总之，这些卦例都说明，《易经》是研究思维决策的书，它的每一卦讲的多是如何审时度势、扬长避短的谋略思想．而每卦前的卦图，自然是思维决策的模型．

3.《周易》一直被当作占筮之书，但却又能最后成为重要的儒家经典，这是一个矛盾的现象．相传《易传》即为孔子所作，虽不能尽信，但至少孔子对《周易》很感兴趣．孔子一生"不语乱、力、怪、神"，又怎么会与占筮结下不解之缘呢？这是个矛盾的现象，但却给易卦是思维决策的数学模型提供了旁证．

古人在研究决策系统时，要对系统中的许多因素的综合作用进行判断．但在科学技术极不发达的古代，由于种种原因，许多因素既不能在事前准确预测，又不能在事中严加控制，对这样的因素是否有利就无法判断，但又必须迅速作出决策不可．在这种情势下，迷信的古人就不能不求助于占（这种现象，即使在今天也不能完全避免），寄希望于以"鬼谋"助"人谋"．王夫之正确地指出："古之为筮者，于事神、治人之大事，内审诸心，求其理之所安而未得，在天子诸侯则博谋之乡士以至庶人，士则切问之师

友，又无折中之定论，然后筮以决之."①所以，占筮是帮助决策的一种特殊手段. 一般老百姓文化不高，知识面窄，控制力弱，在决策时不能不更多求助于占. 而君子们居庙堂之高，掌握权力，广有情报，熟悉历史，在决策时就更多地依赖于"人谋". 所以"善为易者不占"②，"易为君子谋，不为小人谋". ③

4.《系辞》说："子曰：'夫易何为者也？夫易，开物成务，冒天下之道，如斯而已者也'. 是故，圣人以通天下之志，以定天下之业，以断天下之疑."可见，孔子是把《周易》当作通志立业，断疑决策的书来读的. 他说过："加我数年，五十以学易，可以无大过矣！"④这句话很值得分析.

(1)孔子学的《易》决不是《易传》，因为有人认为《易传》就是孔子所作，即使不是孔子所作，也只能是孔子以后的作品.

(2)孔子"五十学易"应是重新学习，反复学习. 因为孔子"年十有五而志于学，三十而立."⑤古代的书籍很少，像孔子那样的一代名儒，百代宗师，学习渊博，不可能等到 50 岁后再开始学习《易经》.

(3)孔子"晚而喜《易》，韦编三绝."⑥如果《易经》只是占筮之书，坚持不语怪、神、乱、力的孔子，有什么必要如此努力地去学习呢？

(4)孔子虽然道德高尚，学识渊博，但是也应该看到，他对于

① 王船山：《周易内传·系辞下传》，《船山全书》第一册，p. 607，岳麓书社，1988 年版.

② 《荀子·大略》

③ 张载：《正蒙·大易篇》

④ 《论语·学而》

⑤ 《论语·为政》

⑥ 《史记·孔子世家》

运筹决策并不高明.他满怀抱负,周游列国,却到处碰壁."再逐于鲁,削迹于卫,穷于齐,围于陈蔡."①"累累如丧家之狗."②

所以,孔子的话的含意是:到了知命之年,他已有了丰富的社会实践,如果天假以年,让他有机会重新研究《易经》,就不会理论脱离实践,在今后的立业断疑,运筹决策中就不会再犯大的错误了.

5.古人虽用《周易》进行占筮,但也并非总按占筮的结论去办事,而是按他们对事物常理的分析去行事的.如《左传·襄公二十五年》记载了一次占筮:齐棠公死了,崔武子前去吊丧,看见齐棠公的遗孀棠姜很美,便要娶棠姜.命人用《周易》占了一卦,左右的人为了奉承崔武子,都说是吉卦,可以娶棠姜;但有一个叫陈文子的却认为是凶卦,引《周易》的卦爻辞来论证是"不可娶也".但崔武子并不听陈文子那一套,认为"一个寡妇能有什么凶险,如果有凶险也都由他死去的男人承担了!"于是娶了棠姜.又例如,《左传·襄公九年》也记载了一个用《周易》占筮的例子:鲁宣公的妻子,鲁成公的母亲穆姜与大夫叔孙侨如通奸,淫乱无德.成公十六年,叔孙侨如阴谋推翻鲁成公,结果失败,穆姜也因此被迁往东宫.这时,她用《周易》占了一卦,占问自己的前途.史官认为占得的卦有外出之义,劝穆姜赶快逃走.但穆姜却认为,只有有德的人,才能出走而免除灾祸.自己与大臣淫乱,祸国殃民,一德也没有,逃走是没有用的.因而不肯出逃.可见,即使古人,也不相信《周易》有什么先验的灵验.可见《周易》决不能纯粹是占筮之书,书中的易卦也就不会起源于占筮.

6.让我们再分析一下前述关于易卦起源的几种说法.

① 《庄子·盗跖》

② 《史记·孔子世家》

法象说的观点与实际情况并不相符.我国古代文字是象形文字,许多字都直接取象于实物,如山、水等文字在今天还保留事物的形象.如果先民们要创造象征8种自然物的符号,合乎逻辑的做法是采用直接描绘事物形象的方法,为什么却使用如此抽象的符号呢?更重要的是,法象说讲的那一套与《易经》本身的文字不符.由8经卦自重的8个纯卦中,除了震卦的卦爻辞中涉及到它所象征的雷以外,其于各卦的卦爻辞都与它们所象征的那些自然物毫不相关.

结绳说肯定易卦是由结绳发展而来的记事的符号,与本文认为易卦是记录决策系统的符号,两者是相容的.结绳说讲的是符号的发展过程,本文则着眼于创造这种符号的原因和作用.

至于数占说,则需要稍为详细讨论一下.

首先必须弄清楚一个问题:究竟是先有易卦的卦图,还是先有揲蓍得数那一套程序.人们认识事物一般是由简单到复杂,由具体到抽象,而不是相反.揲蓍得数是一套理论抽象、操作复杂的程序,而成卦的方法很多(如掷钱币,数奇偶等);画卦简单而具体.先有复杂的筮数后有简单的卦画,不符合思维发展水平较低的先民们的认识规律.

其次,甲骨文中的"奇字"中的数字,未必就是筮数,而很可能是借用数字作为某种特定的符号.为什么这样说呢?

(1)按照筮法,揲蓍成卦所得的筮数是连续的整数,而奇字中的数却是不连续的.这需要作出合理的解释.

(2)按照数占的规则,只有3爻卦或6爻卦,但奇字中却有一些由4个数组成的奇字,甚至还有由"五一八六八五五六八一一一一"这样的由13个数字组成的奇字,这个矛盾同样需要作出解释.

(3)如果奇字中使用的数占法是与广义筮法体系不同的筮

法，由于它有6个不同的筮数，那将是一种更复杂的数占法．为了占筮的目的，而创造一套高度复杂的程序来得到一个简单的卦，似无必要．

(4)从已发现的奇字中各个数字出现的频率分析，与各种类型的筮法中这些数字出现的概率相差很大．因此，奇字中的数字不大可能来源于数占的记录．

综上所述，我们认为只有两种可能：要么"奇字"根本不是数占的记录，而是别的什么文字和符号；要么就是先有了易卦，后人为了利用卦进行占筮，规定了一些适当的办法来得到一个卦．最后，出现了"奇字"那种比较复杂的得卦法．不论是哪一种情况，似乎都难以得出易卦起源于数占的结论．

根据以上所说的诸点理由，说易卦起源于古人研究决策系统的数学模型，是有一定的理由的．

四、 易卦的形式是决策模型最合理的符号

先民们为什么选择了易卦这种符号作为决策系统的描述呢？还有两个必须解释的问题：

第一、一个决策系统涉及的因素是不定的，可以是4个、5个、6个或更多个，为什么易卦只用6个爻表示，即为何只研究6因素的系统呢？

第二、可以用各种不同的符号(只要是两个不同的)来表示同一因素的两个对立面，为什么就偏偏选择"—"和"--"这两个符号呢？

对于第一个问题可以这样来解释：6爻卦是两个3爻卦的重叠，3爻卦描述的是3因素的系统．为什么古人研究的决策系统多是3因素的呢？这是因为：

(1)在许多客观事物中，确有大量的问题是涉及3因素的，如办事要考虑"天时、地利、人和"，选拔官吏要考虑其"德、才、

资”，等等.

(2)我国古代文化传统与“三”字有不解之缘，许多流传至今的制度、规矩、神话和传说，大多数都与“三”字有关. 如祭祀时“王三宿、三祭、三诧(《尚书·顾命篇》)；夏禹治水，三过家门而不入，曾子一日三省其身，打仗的勇气三鼓而竭，等等. 所以，古人办事以三为度，乃是比较自然的事情.

(3)与中国古代哲学思想有关. 老子《道德经》说：“一生二，二生三，三生万物.”老子的思想可能是总结或继承更古老的哲学思想，认为“三”是产生万物的根本.《周易》的作者也可能受到这种思想的影响.

(4)与数的发展史有关. 古人形成自然数的概念，经过了漫长的岁月，他们开始只有一、二、三的概念，三个以上就统称为很多了.“三”是数学发展史上的一个重要里程碑.

作《周易》者取三因素系统作为研究的对象还有一个习惯问题. 这可以从作者在经文中使用数字的习惯看出.《易经》中出现具体数字约 40 个，“三”字有 23 个，占 57%强. 其它的数字出现 17 个，都是一些不能改动的数字，如“一握为笑”、“至于八月”、“七日来复”等. 凡是可多可少的数字一律用“三”，如“田获三狐”、“有不速之客三人来”，等等. 可见，古人对不定数字，多使用“三”为代表. 所以最初主要使用三爻卦.

随着社会的发展，人们的社会活动越来越丰富，考虑的决策系统也越来越复杂，便出现了“八卦相重”的 6 爻卦，即以研究 6 因素的决策系统为主了. 不是 6 因素的系统，如 4 因素、5 因素、7 因素的系统当然也会涉及，所以相对应的 4 爻卦、5 爻卦、7 爻卦也肯定是有的(如甲骨文“奇字”中就有 4 爻卦，如果“奇字”的确是卦的话). 5 爻卦只有 32 个，7 爻卦却有 128 个，前者太少，后者太多. 因此，作为书籍的《周易》从内容的典型性，篇幅的适

当性，体例的统一性出发，只选择 6 爻的卦编成《易经》是不难理解的.

对于第二个问题，笔者的看法是：使用别的符号来画卦者，肯定会有. 如汉帛书《周易》的阳爻和阴爻就用的是“—”和“八”这两个符号. 不过，当时社会生产发展水平很低，人们写字画图还没有纸笔，只能用金属或石片在竹简或其它硬物上刻划. 人们选择的符号很自然地会具有以下几个特点：

(1)笔划简单，形象鲜明；

(2)便于用硬物在硬物上刻划；

(3)占用的篇幅应尽可能地小.

易卦中所用的“—”和“--”两个符号，在这三点上是最合理的，“—”与“--”也显然是硬物刻划硬物的痕迹. 即使在今天，我们也找不到更好的符号比“—”与“--”更符合以上要求. 先民们在长期的使用中，自然而然地逐渐选择了“—”与“--”这两个最恰当的符号. 甲骨文“奇字”的两个主要符号“—”和“八”很可能就是“—”与“--”的前身. 因此，可以说易卦的形式是决策模型的最合理的符号.

综上所述，我们认为易卦起源于古人研究思维决策的数学模型.

§8.2 论《周易》的卦序排列

一、通行本卦序探原

(一)长期悬而未决的问题

通行本《周易》64 卦的卦序排列，是根据什么原则作出的？这是历代易学家聚众纷纭的问题. 很早以前，《十翼》之一的《序卦》就是一本专门论述卦序原理的书. 但是《序卦》对于 64 卦排列顺序的解释，多牵强失理. 因此，遭到后世的非议. 如清初学者

王夫之就曾对其作了这样的批判："其为说也，有相因者，有相成者，有相反者，…因之义穷则托之成，成之义穷则托之反，惟其意之可拟，说之可立而序生焉，未有以见其信然也."①另一方面，汉帛书《周易》的出土，向人们展示了另一个问题：帛书《周易》与通行本《周易》有很不相同的卦序排列. 究竟应该以哪一种顺序为准呢？抑或两者具有同等的地位呢？似乎多数学者都认为，通行本《周易》的卦序较之帛书本《周易》的卦序更富有哲学的义理. 例如，张政烺先生认为"汉唐石经和通行本《周易》六十四卦次序一样，从'十翼'和一些古书的引文看，知是旧本如此，帛书《六十四卦》大不相同，乃经人改动……筮人一般文化不高，为了实用，不求深解，按照当时通行的八卦次序机械地编造出帛书《六十四卦》这样一个呆板的形式，自然为便于检查，却把《易》学上的一些微言奥义置之不顾了."②高亨先生认为"此种顺序，在占筮时得到某一卦与变为某一卦，易于寻检《易经》本文，只合于巫术之需要，不具有哲学之意义."③刘大钧先生则认为："今本六十四卦的排列次序体现了一种阴阳对应变化的观点. 孔颖达曾以'二二相偶，非复即变'的话进行过总结. 故今本卦序，体现了《周易》中阴阳的复变对应，并无死板的公式可循."④

张政烺、高亨两位先生认为帛书《周易》的卦序便于筮人检索是可以理解的. 但是，如果仅仅为了这一目的，何以一定要改变通行本《周易》的卦序才能达到呢？筮人即使文化不高，但他们

① 王船山：《周易外传·序卦传》，《船山全书》，第一册，p. 1092，岳麓书社 1988 年版.

② 张政烺：帛书《六十四卦》跋，《文物》，1984 年第 3 期，p. 13.

③ 高亨：《周易大传今注》，p. 10，齐鲁书社 1980 年版.

④ 刘大钧：《周易概论》，p. 327，齐鲁书社，1988 年版.

长期从事此一职业，又何至于对为数不多的64卦的排列顺序都记不住、查不到呢？刘大钧先生认为通行本《周易》的卦序较之帛书《周易》的卦序更能体现阴阳变化的观点，也不无道理，但并无助于揭露卦序的排列原则．通行本的“二二相偶，非复即变”固然可以体现阴阳变化，矛盾对立的观点，但帛书《周易》的按同一上卦分类排列，不也体现了共性中的个性、同一中的对立之观点吗？并且，屯卦与蒙卦，需卦与讼卦都是“二二相偶”的，何以屯、蒙要排在需、讼之前呢？

因此，关于卦序问题，至少有以下几个问题有待解决：

1．通行本《周易》卦序排列根据的是什么原则？

2．具体的排列方法是怎样作出的？

3．各种不同的排序方法是否在原则上有优劣之分？

4．《易经》64卦，各卦内容相对独立，但《易经》分为上、下两篇，为什么不平均分为每篇32卦，而是上经30卦，下经34卦？这与卦序排列有无关系？

这些都是易学研究中悬而未决的问题．

（二）历代易学家研究卦序的方法

历代易学家几乎都无例外地研究过卦序问题，本书无法详述，这里只略加介绍．

1．义理演绎法

这种方法可以《序卦》为代表，其基本思路是结合经文、卦象、爻辞等以确定卦名的含义，然后根据卦名的含义把它们串连起来．如《序卦》在解释前8个卦的顺序时这样写道：“有天地，然后万物生焉．盈天地之间者唯万物，故受之以屯．屯者，盈也．屯者，物之始生也．物生必蒙，故受之以蒙．蒙者，物之稚也．物稚不可不养也，故受之以需．需者，饮食之道也．饮食必有讼，故受之以讼．讼必有众起，故受之以师．师者，众也．众必有所比，故受之

以比."这种解释牵强附会，难以自圆其说，因而受到后世学者的非议，已如前述．但《序卦》曾长期影响后人的研究方法．

2．图书象数法

《系辞》说："河出图，洛出书，圣人则之．"所以，有些易学家认为古人作卦是受到"河图"、"洛书"的启发，因而卦序也必与图、书有密切的关系．利用图书象数法研究卦序的特点是：把易64卦排成阵式，如8×8的方阵等；然后利用象数寻找某些特殊位置的卦对之间的联系，如旁通、互为复卦等；从而据此断言，这就是前人排序的根据．如清末学者宋书升认为："易道阴阳，其序不外取度于方圆焉．《周易》之序，殆方图之用矩法者也"①宋氏还具体排出了一些方图．在他的方图里面，处于某些对角线位置的卦多有旁通关系．宋氏认为这就是排序奥秘之所在．其实，这是毫无道理的．64卦用两种符号组成，互为旁通的卦有32对之多，用任何一种次序把它们放进一个8×8的方格中，都不难利用象数之学的方法找到某些位置上的卦，使它们具有互为旁通、互为复卦等性质．附会图书象数来解释卦序，似乎并无必要，反有故弄玄虚之嫌，作茧自缚之苦．

3．卦画分析法

这种方法是通过对卦画的结构进行分析，利用卦画有规律的变化来安排卦序．京房卦序就是一个典型的例子．京房卦序先按下列顺序

坤，乾，兑，艮，离，坎，巽，震

把8纯卦排在8宫的开头．对每一宫开头的一卦不断改变它的爻画得出本宫其余的7个卦．例如坤卦䷁，称为本宫；改变其第一爻得复卦䷗，称为一世；再改变第二爻得临卦䷒，称为二世；再

① 宋书升：《周易要议》，p．454，齐鲁书社，1988年版．

改变第三爻得泰卦䷊，称为三世；再改变第四爻得大壮卦䷡，称为四世；再改变第五爻得夬卦䷪，称为五世；把第四爻再改回去得需卦䷄，称为游魂；最后把下卦三爻全部改回去得比卦䷇，称为归魂．这样，就排出了第一宫太阴宫中 8 个卦的顺序．利用同样方法可排出其它各宫卦序．后文还要讨论这个问题．

此外，帛书卦序、伏羲卦序都是利用卦画本身的结构，通过有规律的变化来排列顺序的．因此，通过卦画的结构变化去发现通行本《周易》卦序排列的奥秘，是一种比较可行的办法．

4．现代科学法

近年来，随着科学易学的兴起，许多现代科学的概念不断地被“渗透”到《周易》中来．有人相信，可以从现代科学的探索中，发现《周易》卦序排列的奥秘．早在章太炎先生的《易论》中，就试图把 64 卦的排列顺序纳入社会进化的轨道，无法成功．前几年也有人试图利用二进数来解释通行本《周易》的卦序，但也未能成功．通行本《周易》的开头几卦，化为二进数是：

乾第一⟶$111111_2(63)$，

坤第二⟶$000000_2(0)$，

屯第三⟶$010001_2(17)$，

蒙第四⟶$100010_2(34)$，

需第五⟶$010111_2(23)$，

讼第六⟶$111010_2(58)$．

对应的数字显得杂乱无章，毫无头绪，利用二进数很难找到解释卦序排列的依据．

上述的种种方法，均未能真正揭开通行本《周易》卦序排列的奥秘．

（三）卦序排列的基本原理

6 爻卦共有 $2^6=64$ 个，从逻辑上讲，它们都处于对等的地

位，并不存在谁先谁后的问题．换言之，易卦集 A 是一个无序集，要对其排列顺序，就必须像数学中定义有序集一样，引进一种顺序关系 R．引进的关系不同，导出的排序体系就不一样．通行本是一种关系，帛书本是另一种关系，京氏图又是第三种关系．引进的顺序关系固然可以因人而异，但不言而喻，总应该遵守一些最基本的原则．这些最基本的原则是什么呢？诸如下面一些原则总是不能不考虑的：

1．本质性．即引进的顺序关系，从本质上讲应该是易卦本身所固有的．换句话说，应该来自卦画本身，而不是象数、义理之类属于推演出来的东西，更不宜凭空臆造，主观附会．

2．和谐性．即引进的顺序关系不能使卦与卦之间的排列发生矛盾，以致不能自圆其说．

3．完备性．即用以排序的关系应该对每一卦都有效，不能遗漏，不能重复．换言之，引进的关系必须是线序关系．

4．规律性．引进一种顺序关系，应当反映一定的规律性，不能毫无原则地任意规定一些毫无意义的排序方法．

5．简单性．引进的顺序关系应尽可能地简单，那些无关紧要，可有可无的东西应该去掉，以免把简单的问题复杂化．

从这些基本要求看，义理分析法、图书象数法和现代科学法都是不能完全满足的．这就提示我们，只有对卦画结构进行分析以探求卦序的奥秘，才是一条较为切实可行的道路．

（四）通行本《周易》卦序排列探密

现在，我们试行给出通行本《周易》卦序的一种猜想：

1．显然，作《易》者考虑了简单性原则，所以把互为复卦的两个卦连在一起（如果是自复的卦，则与它的也是自复的旁通卦配成一对），使 64 卦结合为 32 对，以简化排序时的手续．

2．易 64 卦中有 16 个特殊的卦，它们或者是自复的卦，或者

亦复亦变，这 16 卦配成 8 对，构成一个逐步扩张的子群（第四章例题 4.1.3），如图 8.2.1 所示. 乾卦单独成一个子群；加上坤乾后扩张为 2 阶子群，这两个卦都是纯阳或纯阴、自复、互为旁通；再加上坎、离二卦，则成为 4 阶子群，不再保持纯阳、纯阴，但还保持自重、自复、两两旁通；继续加上泰、否、既济、未济 4 卦后，则扩张为 8 阶子群，自重、自复的性质均不再保持，但这 8 个卦都是由“☰，☷，☵，☲”4 个经卦两两重叠而成，或自复、或亦复亦变、两两旁通；最后再加上随、蛊、颐、大过、渐、归妹、中孚、小过 8 卦，成为一个 16 阶子群，这 16 个卦两两旁通配对，或自复、或亦复亦变. 64 卦中再没有具有这种性质的卦了. 通行本《周易》卦序的排列，显然考虑到了这个 16 阶子群，正是从先安排这 16 个特殊卦开始的.

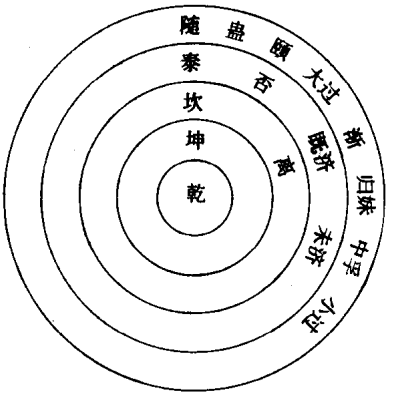


图 8.2.1

3. 根据天道循环的中国古代传统哲学思想，作《易》者不是把 64 卦排成直线或方阵，而是排成一个圆圈，以形成首尾相接，无限循环的形象.

具体的作法可以认为是这样的：把一个圆周等分为 64 份. 首先在南方子位（古代是南上北下，子南午北）取两个位置作为开始的“门户”，当作①、②号，放下乾、坤两卦；然后向右旋转 8 个空位，到了⑪、⑫，放下由乾（☰）、坤（☷）重叠而成的泰、否两卦；再继续向右旋转 $8\times2=16$ 个空位至于㉙、㉚，放下坎、离两

卦；再继续旋转 $8\times4=32$ 个空位，到了㊸、㊹，放下由坎☵，离☲重叠而成的既济、未济两卦. 如图 8.2.2 的(a)所示. 这时旋转了一周，恰好放下了上述 8 阶子群中的 8 个卦.

下一轮在图 8.2.2(a)的基础上，安排 16 阶子群中剩下的 8 个卦. 从㊸、㊹开始，按相反的方向(即向东)旋转 8 个位置，至于㊺、㊻，放下渐、归妹二卦；继续向东旋转 $8\times3=24$ 个位置到了㉗、㉘，放下颐和大过两卦；再向东旋转 $8\times9=72\equiv8(\mathrm{mod}64)$ 个位置(72 个位置去掉一圈后相当于只旋转 8 个位置)到了⑰、⑱，放下随、蛊两卦；最后，把剩下的中孚、小过两个卦放在与坎、离相对的位置㊶、㊷上，即与坎、离所在的㉙、㉚处于直径的两端的位置上. 如图 8.2.2 的(b)所示. 至此，16 阶子群中的 16 个卦全部排完.

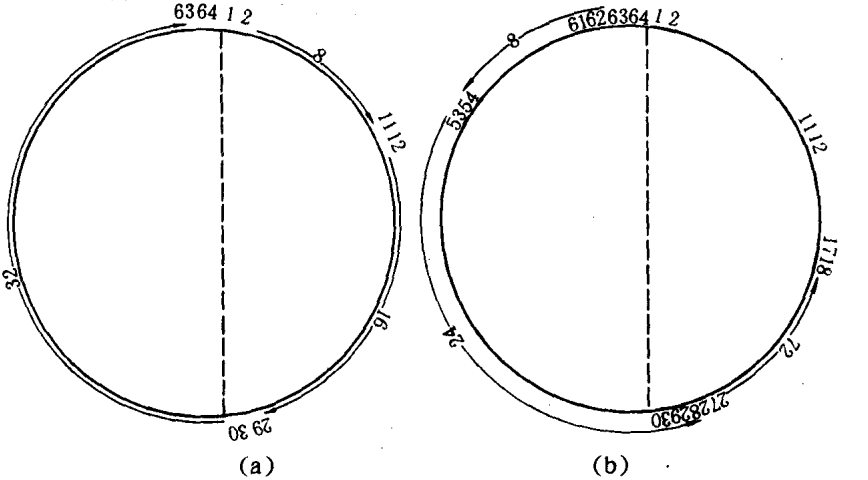


图 8.2.2

汉魏伯阳撰《周易参同契》一书，可能隐约地注意到了卦序排列的奥秘. 书中有“乾坤者，易之门户”.“子当右转，午乃东旋”一类的话.

现在，圆上还剩下 48 个位置，要安排剩下的 24 对卦．根据排列组合知识可知，除去已安排好的 8 对卦外，剩下的 24 对卦的分布情况是：

1 个阳爻的卦 3 对；

2 个阳爻的卦 6 对；

3 个阳爻的卦 6 对；

4 个阳爻的卦 6 对；

5 个阳爻的卦 3 对．

这 24 对卦的排列位置可以写成如图 8.2.3 的表：

	一阳卦	二阳卦	三阳卦	四阳卦	五阳卦
第一段	⑦⑧	③④	○○	⑤⑥	⑨⑩
	⑮⑯	○○	○○	○○	⑬⑭
第二段	㉓㉔	⑲⑳	㉑㉒	㉕㉖	○○
	○○	㉟㊱	㉛㉜	㉝㉞	○○
	○○	㊴㊵	㊶㊷	㊲㊳	○○
	○○	㊺㊻	㊼㊽	㊾㊿	㊸㊹
第三段	○○	㊶㊷	㊺㊻	㊼㊽	○○
	○○	○○	㊾㊿	○○	○○

图　8.2.3

图 8.2.3 中“一阳卦”下面的⑦、⑧，表示在圆上⑦、⑧两个位置要排一个阳爻的卦；㉝、㉞在“四阳卦”那一栏下，表示在圆上㉝、㉞这两个位置要排 4 个阳爻的卦，余可类推．这个表分成 3 段 8 栏，具有整齐对称的形式．它是怎样得来的呢？原来也和 16 阶子群中卦的排列一样，是逐次旋转依阳爻的个数顺次安排的．不过，有三点必须注意：

(1)因为“一阳卦”与“五阳卦”各有 3 对，而“二阳卦”、“三阳卦”、“四阳卦”却各有 6 对．所以，每安排一对“一阳”、“五阳”卦，

要安排两对“二阳”、“三阳”、“四阳”的卦.

(2)按 8 的倍数旋转至某两个位置时,可能已被先安排的卦占领,则把它推移到离这两个位置最近的位置上.例如旋转到⑰、⑱,但是⑰、⑱已经被随、蛊两卦占领,则将其推移到最近的⑲、⑳或⑮、⑯上,余可类推.

(3)原则上按“一阳”、“二阳”、“三阳”、“四阳”、“五阳”的递增顺序排卦,周而复始,但为避免过于呆板,因而有一些带规律性的微小变化.

下面的图 8.2.4 表示旋转的过程.图 8.2.4 从已安排的最后两卦的位置㊶、㊷处出发,分成 3 条线出发,形成 3 线周期,有点像化学元素的周期表.在第一个“周期”中,从㊶、㊷出发转过 8 个位置到⑦、⑧,先安排两个“一阳卦”;再转 8 个位置到⑰、⑱,因⑰、⑱已被随、蛊两卦占住,故推移到最近的空位⑲、⑳,放两个“二阳卦”;再旋转 8 个位置到了㉙、㉚,同样因㉙、㉚已被坎、离占位,故推移到最近空位㉛、㉜,依次放两个“三阳卦”.余可类推.最后转到㊸、㊹,放一对“五阳卦”,完成一个“周期”.

第二线从㊶、㊷开始旋转 16 个位置至于⑮、⑯,第三线从㊶、㊷开始旋转 24 个位置至于㉓、㉔,与第一线的安排方法一样,形成三线分流.

至此,64 卦的位置已全部排妥,把图 8.2.4 的 3 个周期合并在一起,就得到图 8.2.3.把图 8.2.2、8.2.3 合并在一起,就是通行本《周易》卦序排列的全貌.这样,我们似乎揭开了易卦排序的一个秘密:它的排列顺序,应该是根据卦画的结构,而不是什么哲学上的微言奥义.

从图 8.2.2 还可以看到另一个问题的答案:《易经》分为上、下两经,为什么不是各 32 卦,而是上经 30 卦、下经 34 卦呢?从图 8.2.2 看到,无论是㉛、㉜或㉝、㉞在位置上都没有特殊性,它

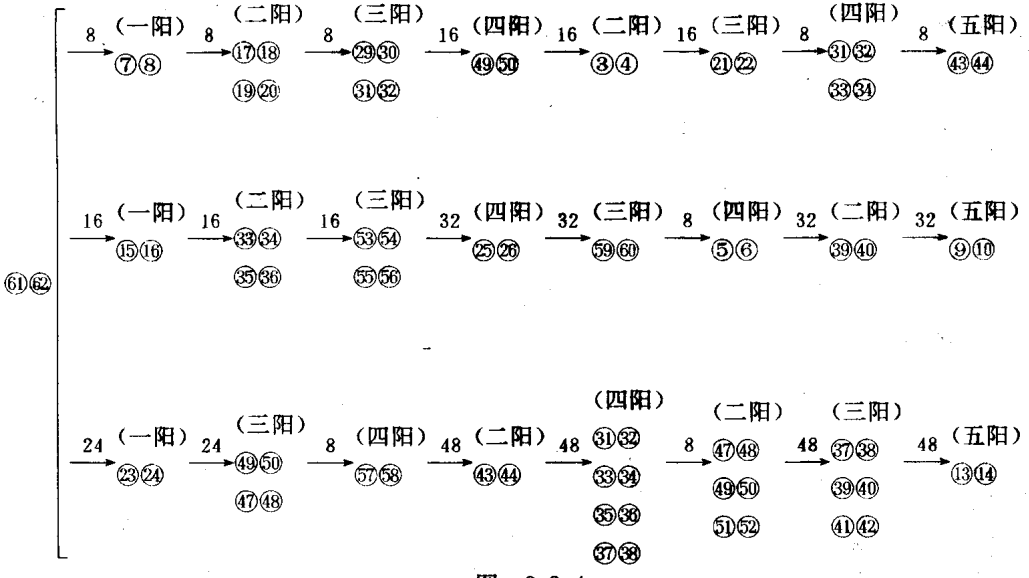

61 62
8 (一阳) ⑦⑧
8 (二阳) 17 18 19 20
8 (三阳) 29 30 31 32
16 (四阳) 49 50
16 (二阳) ③④
16 (三阳) 21 22
8 (四阳) 31 32 33 34
8 (五阳) 43 44
16 (一阳) ⑮⑯
16 (二阳) 33 34 35 36
16 (三阳) 53 54 55 56
32 (四阳) 25 26
32 (三阳) 59 60
8 (四阳) ⑤⑥
32 (二阳) 39 40
32 (五阳) ⑨⑩
24 (一阳) 23 24
24 (三阳) 49 50 47 48
8 (四阳) 57 58
48 (二阳) 43 44
48 (四阳) 31 32 33 34 35 36 37 38
8 (二阳) 47 48 49 50 51 52
48 (三阳) 37 38 39 40 41 42
48 (五阳) 13 14

图 8.2.4

们不是16阶子群中任何两个卦的落脚点，而㉙、㉚则有着位置的特殊性，它是第三次旋转的驻点．它的对径位置㊶、㊷则是“三线分流”的出发点．也许正是由于坎、离两卦这种位置的特殊性，前人选取它们作为上经的终点．

（五）数学与美学的高度结合

通行本《周易》的卦序排列，不仅包含了丰富的数学思想，而且包含了丰富的美学思想，充分运用了简洁、和谐、对称、循环、变化等美学手法．下面略加分析：

1．简洁美．排序者把64个卦分成32对，“两两相偶，非复即变”，把64次排序自然地简化为32次，体现了简洁的美．

2．和谐美．32对卦的排列顺序是按旋转方式安排的，在旋转过程中体现了一种和谐美．如图8.2.2(a)中安排8阶子群的8个卦时，共旋转3次，每次转过的位置都是8的倍数，而且成几何级数增加：1×8，2×8，4×8，刚好旋转成一周．第二次在图8.2.2(b)中安排16阶子群的另一半时，也是旋转3次，每次转过的位置也都是8的倍数，而且成几何级数：1×8，3×8，9×8．在形成“三线分流”的图8.2.4中每次旋转也都是8的倍数，每一线上都是按1∶2∶2∶2∶1的比例安排“一阳”、“二阳”、“三阳”、“四阳”、“五阳”卦的个数．三线之间旋转的次数也基本上对应成比例，如8∶16∶24；16∶32∶48，等等．

3．对称美．排序时首先安排16阶子群中的卦，这些卦或者自为复卦，或者亦复亦变，体现了一种对称的美．图8.2.2的(a)与(b)中，自复卦对与亦复亦变的卦对相间地出现，形成完整的对称：

乾坤（自复，偶）⟶泰否（复变，奇）

⟶坎离（自变，偶）⟶既济未济（复变，奇）

⟺渐归妹（复变，奇）⟶颐大过（自复，偶）

——→随蛊(复变,奇)——→中孚小过(自复,偶)

由图 8.2.4 转化成的图 8.2.3 则更是一个美丽的对称图形.图中 8 个栏分成 3 段,每段自成一对称图形,而上、下两段又形成互补的对称关系,即第一栏与第八栏合成一个通栏,第二栏与第七栏合成一个通栏.中间 4 栏不仅本身形成一个对称图形而且中间隐含着循环关系的对称.

4.变化美.通行本《周易》卦序的排列不仅使用了和谐与对称的原则,反映了严密的规律性,但又富于变化.作《易》者使用了奇偶、正反、循环等变化手法.特别是循环手法,用得更妙.在图 8.2.4 中,"三线分流"按阳爻数出现的卦序是:

(一) (二) (三) (四) (二) (三) (四) (五)
(一) (二) (三) (四) (三) (四) (二) (五)
(一) (三) (四) (二) (四) (二) (三) (五)

每一线由"一阳卦"到"五阳卦"形成循环,中间的卦则形成小循环:

(二)(三)(四)　(二)(三)(四)　(二)(三)(四)
(三)(四)(二)　(三)(四)(二)
(四)(二)(三)

"二阳"、"三阳"、"四阳"卦严格地按自然顺序循环,(二三四)、(三四二)、(四二三)3 种自然顺序循环出现的次序为 3∶2∶1,形成一个三角形.

在图 8.2.3 中,中间 4 栏除㉓、㉔与㊸、㊹两对卦处于"角点"位置外,这 4 栏中每一栏各有"二阳"、"三阳"、"四阳"的卦各 1 对,它们的排列顺序是:

⑲⑳(二阳)→㉑㉒(三阳)→㉕㉖(四阳)
㉛㉜(三阳)→㉝㉞(四阳)→㉟㊱(二阳)
㊲㊳(四阳)→㊴㊵(二阳)→㊶㊷(三阳)

㊺㊻(二阳)→㊼㊽(三阳)→㊾㊿(四阳)

很明显，按序号的递增顺序，第三栏是(二三四)，第四栏是(三四二)，第五栏是(四二三)，第六栏又回到(二三四)，大循环套着小循环：

小循环：(二)——→(三)——→(四)——→(二)
——→(三)——→(四)…

大循环：(二三四)——→(三四二)——→(四二三)
——→(二三四)…

充分体现了一种循环美.

5. 象征美. 在通行本《周易》的卦序排列中，作《易》者充分地利用了象征手法，处处充分地突出了“3”与“8”两个数字. 如图 8.2.2 分别旋转 3 次，每次转过的位置是 8 的倍数；图 8.2.3 的方图中分成 3 段 8 栏，图 8.2.4 中“三线分流”，每线 8 个卦，旋转的次数也都是 8 的倍数. 总之，处处都突出了“3”与“8”这两个数字. “3”与“8”这两个数字有着特殊的象征意义：因为构成易 64 卦的基础是 8 经卦，每一经卦则由 3 个爻组成. 由 3 爻而生 8 卦，由 8 卦而生易学，真有点像“生生之谓易”. 可见，易卦的卦序排列还有深刻的、丰富的象征美.

综上所述，笔者认为：《周易》通行本卦序是“好异者”根据卦画的结构，利用数学与美学的原理，精心地设计出来的. 其计算之精确，方法之巧妙，令人叹为观止. 但其中却不大可能有什么哲学的义理或科学的预示.

二、 方图卦序分析

现在我们转而研究《周易》的另外几种卦序，如京房卦序、帛书卦序、伏羲卦序的排序原理. 这几种卦序都排成了 8×8 的方图，相当于把易 64 卦的集分成了 8 个子集，每个子集有 8 个元素. 易卦集 A 是一个群，因此，方图卦序排列与群的划分就有着

密切的联系.

在第四章的定理 4.3.3 和定理 4.3.4 中，我们证明了关于子群的陪集划分群的定理. 现在把这个定理具体化为易卦群的一个特殊的定理，并称它为

方图定理　设 H 是易卦群 A 的一个 8 阶子群

$$H=\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7,a_8\} \tag{1}$$

又

$$B=\{b_1,b_2,b_3,b_4,b_5,b_6,b_7,b_8\} \tag{2}$$

是 H 的陪集的一个完系. 那么，以 B 中的 8 个卦为纵列，H 中的 8 个卦为横行，作乘法表

$\odot$	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
b_1	b_1a_1	b_1a_2	b_1a_3	b_1a_4	b_1a_5	b_1a_6	b_1a_7	b_1a_8
b_2	b_2a_1	b_2a_2	b_2a_3	b_2a_4	b_2a_5	b_2a_6	b_2a_7	b_2a_8
b_3	b_3a_1	b_3a_2	b_3a_3	b_3a_4	b_3a_5	b_3a_6	b_3a_7	b_3a_8
b_4	b_4a_1	b_4a_2	b_4a_3	b_4a_4	b_4a_5	b_4a_6	b_4a_7	b_4a_8
b_5	b_5a_1	b_5a_2	b_5a_3	b_5a_4	b_5a_5	b_5a_6	b_5a_7	b_5a_8
b_6	b_6a_1	b_6a_2	b_6a_3	b_6a_4	b_6a_5	b_6a_6	b_6a_7	b_6a_8
b_7	b_7a_1	b_7a_2	b_7a_3	b_7a_4	b_7a_5	b_7a_6	b_7a_7	b_7a_8
b_8	b_8a_1	b_8a_2	b_8a_3	b_8a_4	b_8a_5	b_8a_6	b_8a_7	b_8a_8

(3)

则就表(3)中的横行而论，恰好是易卦群 A 对子群 H 的一个划分.

利用方图定理，我们来分析一下几种方图卦序.

(一)帛易卦序

图 8.2.1 是长沙马王堆出土的汉帛书《周易》中对 64 卦的排列图，图中将 64 卦分成 8 宫，分别称为乾宫、艮宫、坎宫、震宫、坤宫、兑宫、离宫、巽宫(帛《易》中各宫的名称与此不同，为便于比较，将其"翻译"成了通用卦名)，每宫 8 个卦，构成一个 8×8 方图. 图中第一横行的 8 个卦：

乾☰，艮☶，坎☵，震☳，坤☷，兑☱，离☲，巽☴ (4)

构成易卦群 A 的一个子群 H. 再看第一列的卦

乾☰，否䷋，遯䷠，履䷉，讼䷅，同人䷌，无妄䷘，姤䷫ (5)

	乾宫 第一	艮宫 第二	坎宫 第三	震宫 第四	坤宫 第五	兑宫 第六	离宫 第七	巽宫 第八
第一卦	乾☰	艮☶	坎☵	震☳	坤☷	兑☱	离☲	巽☴
第二卦	否䷋	大畜䷙	需䷄	大壮䷡	泰䷊	夬䷪	大有䷍	小畜䷈
第三卦	遯䷠	剥䷖	比䷇	豫䷏	谦䷎	萃䷬	晋䷢	观䷓
第四卦	履䷉	损䷨	蹇䷦	小过䷽	临䷒	咸䷞	旅䷷	渐䷴
第五卦	讼䷅	蒙䷃	节䷻	归妹䷵	师䷆	困䷮	睽䷥	中孚䷼
第六卦	同人䷌	贲䷕	既济䷾	解䷧	明夷䷣	革䷰	未济䷿	涣䷺
第七卦	无妄䷘	颐䷚	屯䷂	丰䷶	复䷗	随䷐	噬嗑䷔	家人䷤
第八卦	姤䷫	蛊䷑	井䷯	恒䷟	升䷭	大过䷛	鼎䷱	益䷩

图 8.2.1

这 8 个卦也构成一个子群，自然对于乘法封闭，因而是子群 H 的一个完系. 因此，将(4)中的 8 个卦作横行，将(5)中的 8 个卦作纵列，作乘法表(3)，就得到易卦群 A 关于子群 H 的一个划分. 在这个划分表中，每一列的上卦都是相同的经卦，按下面的顺序

☰，☳，☵，☶，☴，☲，☱，☷ (6)

排列. 每一列的下卦则都是不同的经卦. 考虑 8 经卦的另一种次序

☰，☳，☵，☶，☷，☲，☱，☴ (7)

将表(3)中每列的卦按下卦的顺序加以调整. 使下卦在(7)中排于前面的卦位于下卦在(7)中排于后面的卦的上方，就得到帛书卦序方图.

在第四章例题 4.3.2 中我们曾经指出，帛书卦序方图的 8 宫(8 个纵列)分别作成一个 8 阶子群. 第 1 宫与第 5 宫并为一

个16阶子群；再与第3宫、第7宫并为一个32阶子群；再与第2宫、第4宫、第6宫、第8宫相并，就得到64阶子群即易卦群 A.

(二)京房卦序

图 8.2.2 是所谓“京房卦变8宫卦次图”. 和帛书《易经》一样，京房图也是把64卦分为8宫，分别称为太阴、太阳、少阴、少阳、仲阴、仲阳、孟阴、孟阳. 每一宫包含8卦，顺次称为本宫、一世、二世、三世、四世、五世、游魂、归魂. 作成一个 8×8 的方图：

	太阴第一	太阳第二	少阴第三	少阳第四	仲阴第五	仲阳第六	孟阴第七	孟阳第八
本宫	坤䷁	乾䷀	兑䷹	艮䷳	离䷝	坎䷜	巽䷸	震䷲
一世	复䷗	姤䷫	困䷮	贲䷕	旅䷷	节䷻	小畜䷈	豫䷏
二世	临䷒	遁䷠	萃䷬	大畜䷙	鼎䷱	屯䷂	家人䷤	解䷧
三世	泰䷊	否䷋	咸䷞	损䷨	未济䷿	既济䷾	益䷩	恒䷟
四世	大壮䷡	观䷓	蹇䷦	睽䷥	蒙䷃	革䷰	无妄䷘	升䷭
五世	夬䷪	剥䷖	谦䷎	履䷉	涣䷺	丰䷶	噬嗑䷔	井䷯
游魂	需䷄	晋䷢	小过䷽	中孚䷼	讼䷅	明夷䷣	颐䷚	大过䷛
归魂	比䷇	大有䷍	归妹䷵	渐䷴	同人䷌	师䷆	蛊䷑	随䷐

图 8.2.2

本宫一栏的8个卦为易卦群 A 的一个子群 H(各卦排列与帛书《周易》中不同)：

坤☷，乾☰，兑☱，艮☶，离☲，坎☵，巽☴，震☳ (8)

由本宫顺次得出其一世，二世，…，归魂，相当于顺次乘以 8 个卦，如下表所示：

卦名	例卦	变化规则	相当于用卦 b 乘
本宫	䷁	不改变	b_0=☰(乾)
一世	䷗	改变初爻	b_1=☳(姤)
二世	䷭	改变初爻、二爻	b_2=☳(遯)
三世	䷋	改变初、二、三爻	b_3=☷(否)
四世	䷓	改变初、二、三、四爻	b_4=☴(观)
五世	䷖	改变初、二、三、四、五爻	b_5=☶(剥)
游魂	䷢	改变初、二、三、五爻	b_6=☲(晋)
归魂	䷍	改变第五爻	b_7=☲(大有)

不难直接验证，上表中的 $b_0, b_1, \cdots, b_7$ 中任何两卦相乘都不可能得出纯卦，故

乾☰，姤☰，遯☰，否☷，观☴，剥☶，晋☲，大有☲ (9)

是子群 H 的一个完系. 以(8)为横行，以(9)为纵列，作乘法表(3)，就得到“京房卦变八宫卦次图.”因此，京房卦序也就是易卦群关于其子群 H 的一个划分.

(三)伏羲卦序

著名的“伏羲六十四卦卦序方图”如图 8.2.3 所示.

如果取子群 H 为：

乾☰，夬☱，大有☲，大壮☳，小畜☴，需☵，大畜☶，泰☷ (10)

再考虑另一个子群

坤䷁	剥䷖	比䷇	观䷓	豫䷏	晋䷢	萃䷬	否䷋
谦䷎	艮䷳	蹇䷦	渐䷴	小过䷽	旅䷷	咸䷞	遯䷠
师䷆	蒙䷃	坎䷜	涣䷺	解䷧	未济䷿	困䷮	讼䷅
升䷭	蛊䷑	井䷯	巽䷸	恒䷟	鼎䷱	大过䷛	姤䷫
复䷗	颐䷚	屯䷂	益䷩	震䷲	噬嗑䷔	随䷐	无妄䷘
明夷䷣	贲䷕	既济䷾	家人䷤	丰䷶	离䷝	革䷰	同人䷌
临䷒	损䷨	节䷻	中孚䷼	归妹䷵	睽䷥	兑䷹	履䷉
泰䷊	大畜䷙	需䷄	小畜䷈	大壮䷡	大有䷍	夬䷪	乾䷀

图 8.2.3

乾䷀，履䷉，同人䷌，无妄䷘，姤䷫，讼䷅，遯䷠，否䷋

(11)

(1)对乘法封闭，其中任两卦的乘积都不会属于 H，故为 H 的一个完系. 今取序列(10)为横行，(11)为纵列，作乘法表(3)，即得易卦群 A 对 H 的一个划分. 将乘法表按反时针方向旋转 180°，就得到伏羲卦序方图.

综上所述，我们可以得出如下的结论：

1. 一些方图卦序都可以看作是易卦群 A 对其子群的划分，适当选择子群 H 和它的完系，就得到一些不同的方图卦序. 所

有的方图卦序，其构图原理在本质上是一致的.

2. 和通行本《周易》的卦序一样，其主要依据是卦画结构的有规律的变化(这些变化反映出严格的数学运算规律)，而不大可能是由于哲学上的微言奥义.

§8.3 论大衍之数与筮法

占筮是传统易学中的一个重要内容.《系辞》说："易有圣人之道四焉：以言者尚其辞，以动者尚其变，以制器者尚其象，以卜筮者尚其占."许多易学家都认为易卦起源于占筮，甲骨文上的"奇字"就是古人数占的记录.《易经》经文则是前人对占断结果整理出来的文字. 可见，《周易》与占筮的关系何等密切. 并且，《周易》中的占筮也涉及更多的数学内容，如同余式、概率论等. 对于占筮，易学研究中也存在着不少悬而未决的疑难问题，例如：

1. 大衍之数为什么是 50，为什么其用又只要 49？这些数据能否变动？

2. 甲骨文上的"奇字"究竟是不是古人数占的记录？如果是，又是用的什么筮法？

3.《左传》、《国语》记录的某些筮例，如"遇泰之八"之类的话，作何解释？

以上一些问题，长期困扰着易学家，不少人为之绞尽脑汁，仍未能得出令人满意的解释. 在本节中我们将利用数学方法对这些疑难问题作一些探讨.

一、 大衍之数解谜

关于占筮的具体方法，最早的也是最权威的记载亦见于《系辞》："大衍之数五十，其用四十有九. 分而为二以象两，挂一以象三，揲之以四以象四时，归奇于扐以象闰，五岁再闰，故再扐而后

挂.…是故四营而成易，十有八变而成卦."这段文字的详细说明，已在本书第一章和第七章中介绍过了，此处从略.

(一)

古人占筮为什么开始时用49策，这是易学史上一个长期悬而未决的问题.历代易学家对它作过种种猜测，自汉至今，众说不一.如：①

《汉书·律历志》说："是故元始有象一也，春秋二也，三统三也，四时四也，合而为十，成五体.以五乘十，大衍之数也.而道据其一，其余四十九，所当用也."按照这种解释，"大衍之数五十"是这样得来的：把元始之象一的一，春秋二的二，三统的三，四时的四，以及它们的和十，共称为五体.拿五体的五去乘和十的十得到五十，就是大衍之数的五十.再从五十中减去道所据的一，就得四十九.即

$$(1+2+3+4)\times 5-1=49$$

《周易正义》则引述了下面一些说法：

京房曰："五十者，谓十日，十二辰，二十八宿也，凡五十.其一不用者，天之生气，将欲以虚来实，故用四十九焉."按这种解释，五十是由十日加十二辰再加二十八宿而得，四十九则由五十减去"将欲以虚来实"而不用的一所得.即

$$(10+12+28)-1=49$$

马融曰："易有太极，谓北辰也，太极生两仪，两仪生日月，日月生四时，四时生五行，五行生十二月，十二月生二十四气，北辰居位不动，其余四十九转运而用也."按照这种说法，五十是由太极一，两仪二，日月二，四时，五行，十二月，二十四气相加而得，由五十减去不动的北辰一，就得四十九.即

① 参看刘大钧：《周易概论》，p.95，齐鲁书社1988年版.

$$(1+2+2+4+5+12+24)-1=49$$

荀爽曰："卦各有六爻，六八四十八，加《乾》、《坤》二用，凡五十.《乾》初九：'潜龙勿用'，故用四十九也."按照荀爽的说法，五十是由八经卦的八与每卦六爻的六相乘，再加乾坤两卦中的"二用"(即用九和用六)而得，减去乾卦中有"潜龙勿用"的这一爻即得四十九.即

$$(6\times8+2)-1=49$$

李鼎祚《周易集解》中引崔憬的说法却是："艮为少阳，其数三；坎为中阳，其数五；震为长阳，其数七；乾为老阳，其数九；兑为少阴，其数二；离为中阴，其数十；巽为长阴，其数八；坤为老阴，其数六；八卦之数总有五十.……其用四十有九者，法长阳七七之数也."按崔憬的说法，八经卦的每一卦都对应一个数，把它们所对应的数加起来就得到五十.至于四十九，则是根据长阳的数七自乘而得，即

$$(3+5+7+9)+(2+10+8+6)=50$$

$$7\times7=49$$

朱熹《周易本义》则说："大衍之数五十，盖以河图中宫，天五乘地十而得之，至用以筮，则止用四十九，盖皆出于理势之自然，而非人之知力所能损益也."按照朱熹的说法，五十是由天的生数五与地之成数十相乘而得出的.至于为什么其用只有四十九策，则不是人的智力所能解释和增减的.

以上的解释可谓五花八门，但是不难看到它们有一个共同点：所有这些解释，都是从一些无可验证的形而上学的假定出发，硬凑出五十和四十九这两个数字来.

(二)

当代也有不少易学家对"大衍之数"进行研究.如顾明《周易象数图说》谈到沈宜甲对"大衍之数"的研究时写道："说《易》之

书，仅《四库全书》中的著录就有 158 部，1757 卷，还有附录 8 部，12 卷. 但对筮仪的论述几乎千篇一律，都把 50、49、4、1 等主要数据说得神乎其神，简直是非此莫属，不容作任何考虑. 可是旅居比利时的华人科学家沈宜甲未被这些权威所吓倒，他在参考资料奇缺的条件下，破除迷信，勇于探索，终于在这个问题上有所突破."①根据《周易象数图说》一书的介绍，沈宜甲的研究工作得出下列结论：

(1)筮仪所用的策数不必限于 50，用 49、51 以及别的什么数都可以；

(2)不一定非挂一不可，不挂一也行，挂几不挂几都无所谓；

(3)不一定非揲四不可，也可以揲别的数；

(4)最后所得筮数是 4 个相邻的整数，必然是二奇二偶，从而能以相等的机会决定阴阳.

事实上，上述结论是不能普遍成立的，我们可以随手举出反例.

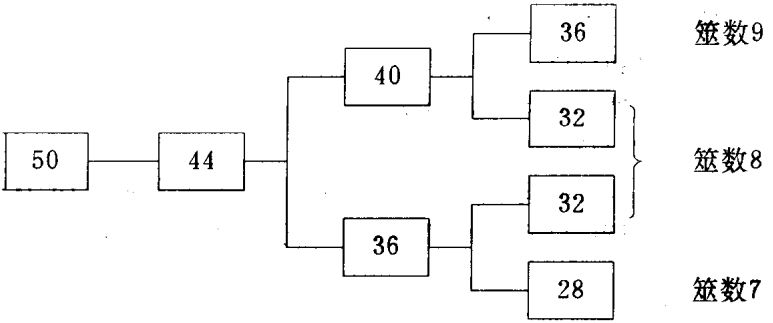
例 1　如果不是"虚一不用"，直接将 50 策按照《系辞》筮法的程序去做，则三变之后所得的筮数只有 7、8、9 三个数，是二奇一偶，而不是二奇二偶.

事实上，50 策挂 1 之后，尚有 49 策，设左手有 $4x+y(0\leqslant x\leqslant 11, 1\leqslant y\leqslant 4)$策，则右手有 $4(11-x)+(5-y)$策. 因为 $1\leqslant y\leqslant 4$，所以 $1\leqslant 5-y\leqslant 4$. 因此，左、右手揲 4 以后的剩余分别为 y 和 $5-y$. 第一变之后，去掉的策数总是

$$y+(5-y)+1=6$$

这意味着，第一变后总是余下 $50-6=44$ 策. 其三变过程如下图所示：

① 顾明：《周易象数图说》，p. 19，中国社会科学出版社 1990 版.

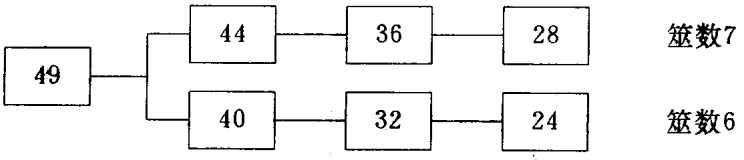


例 2 如果用 49 策，但不挂 1 而挂 3，其余均按《系辞》筮法去做，只能得到 7 与 6 两个筮数.

事实上，第一变后剩下 44 策或者 40 策. 但到第二变和第三变情况就不同了. $4z(z=10$ 或 $11)$ 策挂 3 之后，尚余 $4(z-2)+5$ 策. 设左手有 $4x+y$ 策，则右手有 $4(z-x-2)+(5-y)$ 策. 因 $1\leqslant y\leqslant 4$，故 $1\leqslant 5-y\leqslant 4$. 两手揲 4 后的余数分别为 y 和 $5-y$. 去掉的策数总是

$$y+(5-y)+3=8$$

故第二变后仍只有两种可能：剩下 36 策或 32 策. 同理，第三变后也只有两种可能：剩下 28 策或 24 策. 三变的全过程可图示如下：



所得筮数是一奇一偶，而不是二奇二偶，而且奇与偶(或者说阳爻与阴爻)出现的概率也不相等. 不难算出：

第一变时余策为 40 的概率是

$$P(40)=33/45=0.73$$

第一变时余策为 44 的概率是

$$(P(44)=12/45=0.27$$

从而得到筮数 7 的概率为 0.27，得到筮数 6 的概率为 0.73. 这意味着，出现阳爻与阴爻的概率并不相等，后者约为前者的 2.7 倍.

(三)

其实，“大衍之数五十，其用四十有九”，是古人在数学原理的限制之下，经过长期的实践后摸索到的最佳选择. 我们用数学方法来证明这一结论.

在《系辞》筮法中，一共涉及到 6 个参数：“揲之以四”的 4；“用数四十九”的 $49=4\times12+1$ 中的 12 和 1；“分而为二”的 2；“挂一”的 1；“三变成一爻”的 3. 我们把它推广到一般的情况，就得到在第七章中所述的广义筮法：

《系辞》筮法	广义筮法
揲之以 4	揲之以 m
用数 $49=4\times12+1$	用数 $N_0=mq+r$
分而为 2	分而为 k
挂 1	挂 l
3 变成一爻	n 变成一爻

在推广后的广义筮法中，包含 6 个参数 m,q,r,k,l,n，称为 (m,q,r,k,l,n)筮法，《系辞》筮法则是$(4,12,1,2,1,3)$筮法. 对于广义筮法，我们在第五章中已证明了下面的定理(定理 5.2.1)：

筮法定理　对用数 $N_0=mq+r$ 施行(m,q,r,k,l,n)广义筮法，得到筮数

$$\theta_n=\frac{N_n}{m}=\frac{f^{(n)}(N_0)}{m} \tag{1}$$

则 θ_n 是一些连续的整数，其取值的范围和取值的个数满足下面的关系：

参数之间的关系	θ_n 取值的范围	θ_n 取值个数	编号
$l-r\geqslant 0, k+l\leqslant m$	$q-nk\leqslant\theta_n\leqslant q-n$	$n(k-1)+1$	A
$l-r\geqslant 0, m<k+l\leqslant m+r$	$q-nk\leqslant\theta_n\leqslant q-2n+1$	$n(k-2)+2$	B
$l-r\geqslant 0, m+r>k+l$	$q-nk\leqslant\theta_n\leqslant q-2n$	$n(k-2)+1$	C
$l-r<0, 0<k+l\leqslant r$	$q-nk+1\leqslant\theta_n\leqslant q-n+1$	$n(k-1)+1$	D
$l-r<0, r<k+l\leqslant m$	$q-nk+1\leqslant\theta_n\leqslant q-n$	$n(k-1)$	E
$l-r<0, m<k+l$	$q-nk+1\leqslant\theta_n\leqslant q-2n+1$	$n(k-2)+1$	F

(2)

在《系辞》筮法中，$m=4, q=12, r=1, k=2, l=1, n=3$. 满足定理的条件(2)-A，即 $l-r\geqslant 0, k+l\leqslant m$. 因此，筮数 θ_3 取值的个数为 $n(k-1)+1=3\times(2-1)+1=4$，取值范围则为 $12-3\times 2\leqslant\theta_3\leqslant 12-3$，即 $6\leqslant\theta_3\leqslant 9$.

至于第二段中所举的两个反例，情况就完全不同了.

在例 1 中，$m=4, q=12, r=2, l=1, k=2, n=3$. 满足条件 $l-r<0, r<k+l\leqslant m$，符合定理的条件(2)-E，故筮数 θ_3 取值的个数为 $n(k-1)=3\times(2-1)=3$. 筮数的取值范围则为 $12-3\times 2+1\leqslant\theta_3\leqslant 12-3$，即 $7\leqslant\theta_3\leqslant 9$.

在例 2 中，$m=4, q=12, r=1, k=2, l=3, n=3$. 有 $l-r>0$，$m<k+l\leqslant m+r$，符合定理的条件(2)-B，故筮数 θ_3 的个数为 $n(k-2)+2=3\times(2-2)+2=2$. 其取值范围 $12-3\times 2\leqslant\theta_3\leqslant 12-2\times 3+1$，即 $6\leqslant\theta_3\leqslant 7$.

为了论证《系辞》筮法选择的参数是最合理的，我们还要先给出计算筮数的概率分布的公式.

考虑 $k=2$ 时的广义筮法，即 $(m, q, r, 2, l, n)$ 筮法. 设开始时

用数 $N_0=mq+r$，第 $i(1\leqslant i\leqslant n)$ 变后所得的数为

$$N_i=f(N_{i-1})=f^{(2)}(N_{i-2})=\cdots=f^{(n)}(N_0) \tag{3}$$

并设

$$N_i=m\theta_i+r_i \quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{4}$$

其中 $\theta_0=q,r_0=r,r_i=0(i\geqslant 1)$.

根据第七章例题 7.2.2 的推导方法知：

$$N_{i+1}=f(N_i)=f(m\theta_i+r_i)$$
$$=\begin{cases} m(\theta_i-1) \\ m(\theta_i-2) \end{cases} \quad (i=1,\cdots,n-1) \tag{5}$$

我们来计算

$$f(N_i)=m(\theta_i-1)\text{或}f(N_i)=m(\theta_i-2)$$

出现的概率.

先看 N_1. 因 $N_0=mq+r$，挂 l 之后，尚余 $mq+(r-l)$ 策. 将其分为两个正整数 R_1 与 R_2 之和，则 R_1 与 R_2 可分别取 1 至 $m(q-1)+(m+r-l)-1$ 之间的一切整数值. 当 R_1 取数

$$mp+j \quad (0\leqslant p\leqslant q-1,1\leqslant j\leqslant m)$$

时，R_2 对应的数为

$$m(q-p-1)+[(m+r-l)-j]$$

当且仅当 $1\leqslant j\leqslant(m+r-l)-1$ 时，有

$$1\leqslant(m+r-l)-j\leqslant(m+r-l)-1$$

R_1 与 R_2 用 m 除的余数 r_1、r_2 分别为 j 和 $(m+r-l)-j$. 于是，

$$l+r_1+r_2=l+j+[(m+r-l)-j]=m+r$$

根据广义筮法的定义，有

$$N_1=f(N_6)=N_0-(l+r_1+r_2)$$
$$=(mq+r)-(m+r)=m(q-1)$$

即当且仅当 $R_1=mp+j,0\leqslant p\leqslant q-1,1\leqslant j\leqslant m+r-l-1$ 时，$N_1=f(N_0)=m(q-1)$. 符合这种条件的 R_1 显然共有 $(m+r-l-1)q$

个，故 $N_1=m(q-1)$的出现概率和 $N_1=m(q-2)$出现概率分别为：

$$P(N_1=m(q-1))=\frac{(m+r-l-1)q}{mq-(l-r+1)} \tag{6}$$

$$P(N_1=m(q-2))$$
$$=1-P(N_1=m(q-1))=\frac{(l-r+1)(q-1)}{mq-(l-r+1)} \tag{7}$$

在公式(6)与(7)中，将 N_1 换成 $N_{i+1}(i=0,1,2,\cdots,n-1)$，并注意到 q 换为 θ_i，r 换为 r_i，即得一般公式

$$\begin{cases} P(N_{i+1}=m(\theta_i-1))=\dfrac{(m+r_i-l-1)\theta_i}{m\theta_i-(l-r_i+1)} \\ P(N_{i+1}=m(\theta_i-2))=\dfrac{(l-r_i+1)(\theta_i-1)}{m\theta_i-(l-r_i+1)} \end{cases} \tag{8}$$

（四）

现在，我们根据“筮法定理”来分析为什么《系辞》筮法取用数为 49 是唯一的最佳选择. 不论何种筮法都是按一定的程序进行的，它们不仅要合乎事理，顺乎人情，更重要的是它们必须服从数学的原理. 占筮的具体办法虽然可以人为地主观地规定，但是这种规定必须服从一些不言而喻、不证自明的道理. 这些道理类似于数学或其它学科中的“公理”，是建立学科理论的出发点. 对于占筮，不管选择什么方法，笔者认为，占筮最后所得筮数，必须满足下述公理.

1. 随机性原理

占筮的结果出现什么筮数，应该是随机的，所谓“阴阳不测之谓神”. 为了保证筮数的随机性，选择的参数就要求不容易人为地控制其结果.

2. 等概率原理

占筮是预卜吉凶，筮数所能显示的结果总应该是可吉可凶，吉凶参半的. 无论采用何种筮法，奇数或偶数（或者说阳爻与阴

爻)出现的概率应该相等,才合乎事理与人情.

3. 变爻原理

一方面,占筮中要求阳爻阴爻以等概率出现;另一方面,筮者为了适合求筮者趋吉避凶的心理,又要为自己的预言留有变通的余地,就要求有一些可变的爻,并要求出现变爻的概率有一个适当的幅度.例如,80%以上.当然,变爻的概率也不宜太大,如超过95%就显得占筮总是缺乏定准.

4. 最小数原理

如果在广义筮法中,某一参数值取 x 或 y 时,最后所得的筮数完全一样(包括数值、个数及概率分布),则应取 x,y 中较小的一个,使筮法程序保持较简.

根据上述原理,我们来分析《系辞》筮法的参数.先看分组数 k 和变的次数 n.

先考虑 k.从最小数原理出发,若 $k=1$,即不分组,则最后得什么筮数是必然事件而不再是随机事件,违背了随机性原理.又古人用两只手分策,自然的趋势是"分而为二",两手各抓一把.因此,合理的选择是先取 $k=2$ 出发试解.

再考虑 n.如果 $n=1,n=2$,很快就能发现,所得筮数奇数或偶数出现的概率不等.另一方面,我国古代的文化传统表明:古人办事往往以"三"为度,许多留传下来的法则、制度、规矩、礼仪或习惯都是三次,对于占筮也难于例外.因此,选择 $n=3$ 作为试解的出发点是较为自然的.

n 和 k 这两个参数一经取定,根据筮法定理知,筮数 θ_n 取值的个数也就随之而定,如下所示:

参数满足(2)中的条件	A	B	C	D	E	F
筮数 θ_n 取值的个数	4	2	1	4	3	1

(9)

为了保证阴爻与阳爻的等概率出现,筮数的个数应为偶数,即只

能为 2 或 4. 但若为 2 个，则刚好一奇一偶，一阳一阴，无法再安排变爻. 唯一的办法是取参数值使得筮数为 4 个，换言之，所选择的参数应该满足筮法定理中的条件(2)-A 或(2)-D：

(2)-A：$l-r\geqslant 0$，且 $k+l\leqslant m$

(2)-D：$l-r>0$，且 $k+l\leqslant r$

比较这两个条件，在条件(2)-A 中，可取 $l=r$ 以简化一个参数，且 r 不受已经取定的 k 的影响，而在条件(2)-D 中，必须 $r>l$，$r\geqslant k$，不仅多一个参数，且 r 的选取要受到 k 的限制. 所以，人们自然会选择参数使满足条件(2)-A，并且进一步令 $l-r=0$.

怎样选择 q 呢？根据《系辞》的说法，三次"归奇于扐"，最多可达 $6m$ 策，最后剩下 $(q-6)m$ 策. "奇"的意义是零头，舍去的既然是零头，应该不大于剩下的"主要"部分. 而且，若 q 太小，到第二、三变时，已经所剩无几，易于人为的控制最后结果而失去其随机性. 因此，q 至少应该满足 $(q-6)m\geqslant 6m$，即 $q\geqslant 12$. 故取 $q=12$ 进行试解是合理的.

至此，作为试解，6 个参数已选择了 $k=2$，$n=3$，$l=r$，$q=12$. 下一步要确定 m. 可从较小的 m 出发，利用公式(8)逐一计算概率，以探求最合理的 m 值.

①若 $m=2$，则由 $l+k\leqslant m$ 得 $l+2\leqslant 2$，必然有 $l=r=0$. 于是，开始用数只有 $N_0=2\times 12+0=24$，策数太少，且余数只有 1 和 2 两种可能，易于受到人为的控制而影响其随性机. 且"老阴"与"老阳"的概率分别为

$$P(\theta_3=6)=\frac{11}{23}\times\frac{9}{19}\times\frac{7}{15}=0.106$$

$$P(\theta_3=9)=\frac{12}{23}\times\frac{11}{21}\times\frac{10}{19}=0.144$$

出现变爻的概率为 $0.106+0.144=0.250$，亦嫌稍小. 故不宜取 $m=2$.

②若 $m=3$，则由 $l+k\leqslant m$ 得 $l+2\leqslant 3$，l 可为 0 或 1.

(i)当 $l=r=0$ 时，由(8)算出

$$P(\theta_3=6)=0.030$$

$$P(\theta_3=7)=0.200$$

$$P(\theta_3=8)=0.444$$

$$P(\theta_3=9)=0.325$$

阳爻与阴爻出现的概率分别为：

$$P(\text{阳})=P(\theta_3=7)+P(\theta_3=9)$$

$$=0.200+0.325=0.525$$

$$P(\text{阴})=P(\theta_3=6)+P(\theta_3=8)$$

$$=0.030+0.444=0.474$$

两者不相等，且变爻的概率

$$P(\text{变})=P(\theta_3=6)+P(\theta_3=9)=0.030+0.325=0.355$$

又嫌太大，故这种情况不宜采用.

(ii)当 $l=r=1$ 时，由(8)算出

$$P(\theta_3=6)=0.129$$

$$P(\theta_3=7)=0.428$$

$$P(\theta_3=8)=0.356$$

$$P(\theta_3=9)=0.087$$

阳爻与阴爻出现的概率分别为：

$$P(\text{阳})=P(\theta_3=7)+P(\theta_3=9)$$

$$=0.428+0.087=0.515$$

$$P(\text{阴})=P(\theta_3=6)+P(\theta_3=8)$$

$$=0.129+0.356=0.485$$

两者的概率仍不等，且出现变爻的概率

$$P(\text{变})=P(\theta_3=6)+P(\theta_3=9)$$

$$=0.129+0.087=0.216$$

比 $m=2$ 时更小. 故这种情况也不能适用.

所以, $m=3$ 不宜采用.

③若 $m=4$, 由 $l+k\leqslant m$ 推出 $l\leqslant 2$, l 可为 0,1,2.

(i)若 $l=r=0$, 由公式(8)算出

$$P(\theta_3=6)=0.012$$

$$P(\theta_3=7)=0.128$$

$$P(\theta_3=8)=0.412$$

$$P(\theta_3=9)=0.452$$

$$P(\text{阳})=P(\theta_3=7)+P(\theta_3=9)$$

$$=0.128+0.452=0.580$$

$$P(\text{阴})=P(\theta_3=6)+P(\theta_3=8)$$

$$=0.012+0.412=0.424$$

$$P(\text{变})=P(\theta_3=6)+P(\theta_3=9)$$

$$=0.012+0.452=0.464$$

不仅阳爻与阴爻出现的概率相差更大, 变爻的概率也嫌过大, 所以, 这种情况不适用.

(ii)$l=r=1$, 这就是《系辞》所用筮法, 由公式(8)算出诸概率为

$$P(\theta_3=6)=0.052$$

$$P(\theta_3=7)=0.289$$

$$P(\theta_3=8)=0.448$$

$$P(\theta_3=9)=0.211$$

出现阳爻与阴爻的概率分别为

$$P(\text{阳})=P(\theta_3=7)+P(\theta_3=9)$$

$$=0.289+0.211=0.500$$

$$P(\text{阴})=P(\theta_3=6)+P(\theta_3=8)$$

$$=0.052+0.448=0.500$$

两者已经相等，出现变爻的概率为

$$P(\text{变})=P(\theta_3=6)+P(\theta_3=9)$$
$$=0.052+0.211=0.263$$

利用贝努里试验的概率分布公式

$$P(k)=C_r^k p^k(1-p)^{r-k} \tag{10}$$

将 $r=6, p=0.263$ 代入(10)式，即可求得每一卦 6 个爻中出现 k 个变爻($0\leqslant k\leqslant 6$)的概率分布为

变爻个数 k	0	1	2	3	4	5	6
出现概率 $P(k)$	0.16	0.34	0.31	0.15	0.04	0.01	0.00

(11)

可见，至少出现一个变爻的概率约为 84%，而出现多于 3 个变爻的概率约 5%，为小概率事件.既保证了有 84%以上的机会出现变爻，大部分占筮有变通的余地；但出现 3 个以上的变爻的概率却很小，又不给人以变爻太多，占筮缺乏定准的感觉.这意味着，当 $m=4$，且 $l=r=1$ 时，完全符合占筮的要求了.根据最小数原理，不必再作他求.

综上所述，《系辞》筮法所选择的参数(4,12,1,2,1,3)，也就是“大衍之数五十，其用四十有九”，是唯一的最佳选择.它合乎数理，顺乎人情，是逻辑的必然，数学的限定，诚如朱熹所云：“盖出于理势之自然，而非人之知力所能损益也.”

“大衍之数”是我国古代数学史上一个光辉的成就，它综合运用了初等数论、组合论、概率论的知识，对一个复杂的数学模型求出了最佳解，因而为我国历代数学家所推崇.秦九韶把他的伟大发明“一次同余式组解法”称为“大衍求一术”，人们对“大衍之数”的推崇可见一斑.可惜数千年来，它却被披上种种神秘的外衣，在巫术的笼罩下被埋没了.正本清源，现在应该是剥去其神秘的外衣，让它重现光辉的时候了.

二、 春秋变占新考

(一)

《周易》历来被视为占筮之书，现在流传下来的较早的有关用《周易》进行占筮的文字记载，见于《左传》和《国语》.《左传·庄公二十二年》:"周史有以《周易》见陈侯者，陈侯使筮之，遇观之否."明确地指出了人们用《周易》进行占筮的历史事实.《左传》、《国语》两书中共有涉及《周易》的记载 22 条，其中有 6 条是引用《周易》以说明或评论事理的.关于占筮的有 16 条，其中有 14 条涉及变卦.

按照《系辞》筮法，经过三变之后，得到 6,7,8,9 四个筮数中的一个，若是奇数 7 或 9 就得到阳爻；若是偶数 6 或 8，就得到阴爻.所以"三变成一爻","十有八变而成卦".此外，还有一个补充规定：7 与 8 两个筮数是不能变的，而 6 与 9 两个筮数却可以互变.例如所得筮数为 6，本应该得到阴爻，但也可变为阳爻；同样，若得到筮数 9，本应取阳爻，但也可变为阴爻.有的人把这套规则称为"9、6 互变".但互变之后的 9 与 6 仍可互变，不如改称为"逢 6 变 7，逢 9 变 8"，更为明确.例如，在占筮时，所得筮数依次为 9,8,8,8,7,8，则得到屯卦䷂，但屯卦的初爻筮数是 9，属于变爻，故可变为阴爻而得到比卦䷇，叫做"遇屯之比".屯卦称为本卦，比卦称为之卦.本卦也称为贞卦，之卦又称为悔卦.

根据高亨先生的解说：①春秋时的人用《周易》进行占问时，要利用下列 8 项进行解卦：(1)本卦卦象；(2)之卦卦象；(3)本卦卦名；(4)之卦卦名；(5)本卦卦辞；(6)之卦卦辞；(7)本卦变爻爻辞；(8)之卦变爻爻辞.

本书无意去研究古人怎样解卦以明吉凶，而是要研究一下

① 高亨：《周易杂论》，p. 105，齐鲁书社，1988 年版.

存在于《左传》、《国语》中关于变占的几个疑难问题.为了说明这些问题的性质,我们先把《左传》、《国语》中有关占筮的16条记载列举如下:

①《左传僖公十五年》:"其卦遇蛊䷑".无变爻;

②《左传成公十六年》:"其卦遇复䷗".无变爻;

③《左传闵公元年》:"遇屯䷂之比䷇".1爻变,变爻初九;

④《左传僖公二十五年》:"遇大有䷍之睽䷥".1爻变,变爻九三;

⑤《左传昭公五年》:"遇明夷䷣之谦䷎".1爻变,变爻初九;

⑥《左传昭公七年》:"遇屯䷂之比䷇".1爻变,变爻初九;

⑦《左传昭公十二年》:"遇坤䷁之比䷇."1爻变,变爻六五;

⑧《左传庄公二十二年》:"遇观䷓之否䷋".1爻变,变爻六四;

⑨《左传闵公二年》:"遇大有䷍之乾䷀".1爻变,变爻六五;

⑩《左传僖公十五年》:"遇归妹䷵之睽䷥."1爻变,变爻上六;

⑪《左传襄公二十五年》:"遇困䷮之大过䷛".1爻变,变爻六三;

⑫《左传哀公九年》:"遇泰䷊之需䷄."1爻变,变爻六五;

⑬《国语·周语下》:"遇乾䷀之否䷋."3爻变,变爻初九、九二、九三;

⑭《国语·晋语四》:"贞屯䷂悔豫䷏,皆八也."3爻变,变爻初九、六四、六五;

⑮《国语·晋语四》:"得泰䷊之八."变爻情况不明;

⑯《左传襄公九年》:"遇艮之八.史曰:"是谓艮䷳之随䷐."5爻变,变爻初六、九三、六四、六五、上九.

从上面的摘录中可以得出一些统计数字:

卦中变爻个数	0	1	2	3	4	5	6	不明
出现次数	2	10	0	2	0	1	0	1
出现频率	0.125	0.625	0.000	0.125	0.000	0.063	0.000	0.063

(1)

从表(1)的变爻分布和《左传》、《国语》中的有关记载，人们提出了两个问题：

1. 从理论上讲，一个卦中出现的变爻个数可以是 0,1,2,3,4,5,6 这 7 个数中的任何一个. 在表(1)中，除一例情况不明外，其余发生变卦的 13 卦中，变爻的个数都是奇数，何以不见 2 爻变、4 爻变以至 6 爻变的卦呢？虽然几爻变的卦出现概率有一定的概率分布，但何至都为 0？这是偶然的现象呢？还是与变卦的规则有关？

2. 在摘录中编号为⑭、⑮、⑯的三个卦中都有一个“八”字：

⑭贞屯䷂悔豫䷏，皆八也；

⑮得泰䷊之八；

⑯遇艮䷳之八，史曰：“是谓艮䷳之随䷐.”

这 3 个筮例中的“八”字作何解释？历代易学家绞尽脑汁，对它作了种种猜测与假定，但都很难自圆其说. 这几个“八”字究竟有何意义？成了难解的千古之谜.

这两个问题实质上可归结为一个问题：《左传》、《国语》所用的筮法是何种筮法，是否就是通常的《系辞》筮法. 利用数学方法，借助概率分析，可以找到一些蛛丝马迹，从而有助于解开这个千古之谜.

(二)

当我们去掉占筮的迷信色彩后，从纯数学的抽象去分析筮法成卦的过程，《系辞》筮法最后得到的筮数是 6,7,8,9 这 4 个数字的某一个，它们出现的概率分布为(第七章例 7.2.1)：

筮数 k	6	7	8	9
概率 $P(k)$	0.052	0.289	0.448	0.211

(2)

出现变爻的概率：

$$P(\text{变})=P(6)+P(9)=0.052+0.211=0.263 \tag{3}$$

根据贝努里试验公式

$$P(k)=C_6^k(0.263)^k(1-0.263)^{6-k} \tag{4}$$

可算出出现 $k(0\leqslant k\leqslant 6)$ 个变爻的卦的概率分布为

卦中变爻个数 k	0	1	2	3	4	5	6
概率 $P(k)$	0.160	0.342	0.305	0.144	0.039	0.006	0.000

(5)

由(5)知，一个卦中至少出现一个变爻的概率，即发生卦变的概率为

$$P(\text{卦变})=1-0.160=0.840 \tag{6}$$

在同一卦中出现 4 个或 4 个以上变爻的概率仅仅为 0.039＋0.006＝0.045，为小概率事件.

考察《左传》、《国语》的 16 个筮例中，发生变卦的 14 例，占 87.5%，其中有 4 个以上变爻的 1 例，占 6.25%，与理论计算的概率相接近，因此，可以初步认为，《左传》、《国语》的筮例可能用的是《系辞》筮法.

进一步的统计分析发现，16 例占筮中变爻个数的分布极不合理. 根据(5)可以算出不同个数变爻的卦在 16 次占筮中出现的数学期望，与(1)对比，得下表：

卦中变爻个数	0	1	2	3	4	5	6
数学期望	2.56	5.47	4.88	2.30	0.63	0.10	0
实际出现次数	2	10	0	2	0	1	0

(7)

将(7)中的 16 次占筮中出现的数学期望与实际出现次数比较，发现两者的差别很大，而差别集中表现在含有一个变爻的卦

和含有 2 个变爻的卦上. 出现有 1 个变爻的卦在 16 次试验中的期望值为 5.47，而实际出现的次数却为 10；出现有 2 个变爻的卦在 16 次试验中的期望值为 4.88，而实际出现的次数却为 0，这是极不正常的.

另外，在实际出现的 10 个一爻变的卦中，其唯一的变爻是由阴爻变阳爻的却有 6 个之多，这也是不正常的. 因为，在一般情况下，对于“一爻变”的卦的变爻是由阴变阳的概率为

$$P(\text{一爻变且由阴变阳})=0.342\times\frac{0.052}{0.263}=0.068 \quad (8)$$

这意味着，在已出现 10 个“一爻变”的卦这一条件下，其中能有一个是“由阴变阳”的概率只有 0.68，即 10 个“一爻变”的卦中，“由阴变阳”的卦的数学期望只有 0.68，不到 1 个，与实际出现个数 6 相差约 9 倍.

上述的情况极不正常，一般地说不可能发生. 唯一合理的解释只能是：春秋时代的筮法，虽然在得到筮数 6，7，8，9 的方法与由筮数决定爻性的方法都与《系辞》筮法是相同的，并且在出现筮数 6 与 9 时要发生变卦这一点也相同，但变卦的具体规则并不完全像《系辞》筮法所说的那样简单，即“逢 6 变 7，逢 9 变 8”，而是存在着另外的规则.

这样的推测是有充足的理由的. 因为：

第一，由表(2)知，出现筮数 9 的概率 $P(9)=0.211$，而出现 6 的概率 $P(6)=0.052$，前者是后者的 4 倍. 如果是简单地按照“逢 6 变 7，逢 9 变 8”的规则办事，那么“由 9 变 8”的概率就要大大高于“由 6 变 7”的概率. 这意味着，在变卦时 80%的机会是阳爻变阴爻，只有 20%的机会是阴爻变阳爻.

第二，因为出现筮数 8 的概率 $P(8)=0.448$. 如果再加上“逢 9 变 8”的规则，9 的概率 $P(9)=0.211$. 这样，在变卦后出现

阴爻的概率为

$$P(8)+P(9)=0.448+0.211=0.659,$$

这意味着，有 2/3 的机会出现阴爻，只有 1/3 的机会出现阳爻.

以上两点，完全破坏了等概率原理，也破坏了人们的心理平衡. 求筮者有理由要求，在变卦中，“由阴变阳”和“由阳变阴”两者应保持相等的概率；同时要求，在变卦之后，“出现阳爻”和“出现阴爻”，两者也应保持相等的概率. 为达到这一目的，只有在制定变卦的规则时，增加“由阴变阳”的机会，而减少“由阳变阴”的机会. 因此，简单地规定“逢 6 变 7，逢 9 变 8”就不行了，而必须加以调整.

(三)

如果注意到表(7)中，“一爻变”和“二爻变”的卦的数学期望为 10.35，而实际出现的“一爻变”和“二爻变”的卦恰好为 10；并且其它几种变卦的数学期望与实际次数大体相符，使我们猜想，问题主要出在“一爻变”和“二爻变”的卦上. 很可能某些按照《系辞》筮法的规定是应该“二爻变”的卦，在春秋时代的筮法中，却规定为“一爻变”了. 另外，在表(7)中的 10 个“一爻变”的卦中，是“由阴变阳”的共有 6 例，超过其数学期望 9 倍. 因此，我们还可以进一步猜想，那些按《系辞》筮法本应“二爻变”的卦按春秋筮法规则都只变一爻，而且不管按《系辞》筮法两个变爻是什么，都只把一个阴爻变成阳爻(如果本卦中还有阴爻的话).

如果这一猜想成立的话，对按《系辞》筮法恰好有两个变爻的卦，又按什么规则只把其中的一个阴爻变为阳爻呢？让我们进一步分析“二爻变”的情况. 出现“二爻变”的两个筮数共有 3 种可能情况：

9 与 9；9 与 6；6 与 6

当“一个卦中恰好有两个变爻”这一事件已发生之后，它们的条

件概率分别为

$$P(9\text{与}9|2\text{个变爻})=\frac{211}{263}\times\frac{211}{263}=0.644$$

$$P(9\text{与}6|2\text{个变爻})=2\times\frac{211}{263}\times\frac{52}{263}=0.317$$

$$P(6\text{与}6|2\text{个变爻})=\frac{52}{263}\times\frac{52}{263}=0.039$$

从而，出现恰有两个变爻的卦的概率为

$$P(9\text{与}9)=0.305\times0.644=0.196$$

$$P(9\text{与}6)=0.305\times0.317=0.097$$

$$P(6\text{与}6)=0.305\times0.039=0.012$$

对于“一爻变”和“二爻变”的卦，其筮数一共有5种可能的情况：一个9，一个6，2个9，2个6，9与6，通过16次占筮，5种情况的数学期望分别为：

卦中变爻	一爻变		2爻变		
个　数	9	6	9与9	9与6	6与6
数学期望	4.390	1.082	3.136	1.552	0.192
近似整数	4	1	3	2	0
实际次数	4	6	0	0	0

(8)

从表(8)明显地看出，记录中有4个“由阳变阴”的“一爻变”的卦，与其数学期望值4相符. 可以认为：4个“一阳变阴”的卦(即屯䷂之比䷇，大有䷍之睽䷥，明夷䷣之谦䷎，屯䷂之比䷇)，本卦确只包含一个筮数“9”，这个9变为阴爻后得到之卦. 至于“一阴变阳”的卦，表(8)中的数学期望值为1，但实际情况却出现了6次，绝对误差为5. 反观“二爻变”的卦，数学期望值虽为5，而实际出现次数却为0，绝对误差也是5. 因此，可以进一步猜测：6个“一阴变阳”的卦中，只有一例确是本卦只包含一个筮数“6”，这个“6”变为阳爻而得到之卦；另外的5个其本卦原是两个变爻

(9 与 9 的约 3 个,9 与 6 的约 2 个,6 与 6 的期望值很小,可以认为不出现),它们变卦时,筮数 9 并不变,而把某一筮数"6"变为阳爻.把哪一个阴爻变为阳爻呢?考察《左传》、《国语》中 6 个"一阴变阳"的卦:

A 类:遇坤䷁之比䷇(六五变)

B 类:遇归妹䷵之睽䷥(上六变)

遇大有䷍之乾䷀(六五变)

遇观䷓之否䷋(六四变)

C 类:遇困䷮之大过䷛(六三变)

遇泰䷊之需䷄(六五变)

A 类只有一卦,本卦坤没有阳爻,不可能含有筮数 9 并保持不变.因此,可认为本卦坤恰含有一个 6,将其所对应的"六五"阴爻变为阳爻而得之卦.*B* 类有 3 卦,它们都包含两个不变的阳爻,也都有一个阴爻变成了阳爻.可能是本卦中本有两个 9,但都保持不变,而把爻位最高的一个阴爻(筮数是 8 而不是 6,如果是 6,按《系辞》筮法就有 3 个变爻了)变成了阳爻.*C* 类中的两卦都有保持不变的阳爻,也有一个阴爻变成了阳爻.可以设想,本卦原是包含一个 9 和一个 6,对应于 9 的阳爻不变,而对应于 6 的阴爻变成阳爻.

至此,我们基本上勾画出了春秋时代筮法的大致轮廓:

1. 春秋筮法与《系辞》筮法在"大衍之数五十,其用四十有九",以及"分而为二","挂一","揲之以四","归奇于扐","三变成爻","十有八变而成卦"等这一套程序方面,都与《系辞》筮法相同,最后所得筮数也必为 6,7,8,9 这 4 个数之一.

2. 当出现筮数 6 和 9 时,春秋筮法和《系辞》筮法一样都要发生变卦,但两者变卦的方法并不相同.《系辞》筮法是将筮数 6 对应的阴爻变为阳爻,筮数 9 对应的阳爻变为阴爻;而春秋筮法

则不一定把 6 与 9 所对应的爻都变成爻性相反的爻，而是另有规定. 筮数 6 与 9 的出现，只相当于发出了必须变卦的指令. 为方便计，以下称 6 与 9 为可变筮数.

3. 对于只含 1 个或 3 个可变筮数以上的卦，春秋筮法的变卦规则与《系辞》筮法同，即把 6 对应的阴爻变为阳爻，把 9 对应的阳爻变为阴爻.

对恰含有两个可变筮数的卦，则按下法变卦：

(1)所含两个可变筮数为 9 与 9 时：

这时两个筮数 9 所对应的阳爻都不变，而把本卦位于最上的一个阴爻(筮数为 8!)变为阳爻.

特殊情况，当本卦为乾䷀时，仍将两个筮数 9 所对应的阳爻都变为阴爻.

(2)所含两个可变筮数为 9 与 6 时：

这时筮数 9 所对应的阳爻保持不变，筮数 6 所对应的阴爻变成阳爻.

(3)所含两个可变筮数为 6 与 6 时：

这时与《系辞》筮法相同，把两个筮数 6 对应的阴爻都变成阳爻.

如果按上述框架进行变卦，则不难计算出：在成卦时，出现阳爻或阴爻的概率是相等的，64 卦中每一卦出现的概率也是相等的，出现变卦的概率为 0.84，这些都保持了与《系辞》筮法的同一性. 至于变卦的具体办法，《系辞》中没有明确的记载，根据后人的推测是“逢 6 变 7，逢 9 变 8”. 但这有很大的缺陷，即“由阳变阴”的概率与“由阴变阳”的概率不相等，前者大约是后者的 4 倍. 若按上述框架进行变卦，则“由阳变阴”与“由阴变阳”的数学期望之比为 1.07 ∶ 1，接近于平衡. 所以，调整后的春秋筮法比《系辞》筮法的变卦规则更为合理，古人采用了不同于《系辞》

筮法的变卦规则，如本文所调整的这种规则，并不是不可能的.

现在再把按调整后的变卦规则在 16 例中的数学期望值与实际情况列表比较于下：

按本文规则应变爻数	按《系辞》筮法 6 爻中包含 6 与 9 的个数	出现的概率	16 次试验的数学期望	《左》、《国》中的实际记录
0	不包含 6 或 9	0.160	2.56	2
1	①恰包含一个 9 或一个 6 ②恰包含两个 9 ③恰包含一个 9 和 1 个 6	0.636	10.18	10
2	恰包含 2 个 9 或 2 个 6	0.014	0.22	0
3	恰包含 3 个 6 或 9	0.144	2.304	2
4	恰包含 4 个 6 或 9	0.039	0.624	1*
5	恰包含 5 个 6 或 9	0.006	0.010	1
6	恰包含 6 个 6 或 9	0.000	0	0

(9)

* 下面将论证有一卦是 4 爻变的.

(四)

在上面已作出的结论的基础上，我们可以对“遇泰䷊之八”、“遇艮䷳之八，史曰：‘是谓艮䷳之随䷐’”，“贞屯䷂悔豫䷏，皆八也.”这 3 个筮例中的“八”字作出新的解释了.

因为按照上面所总结的规则，如果一个卦中恰好含有两个可变筮数 6 与 9(即 9 与 9，9 与 6，6 与 6)，除此卦为乾卦䷀外，9 所对应的阳爻是不变的.但若一个卦中只包含一个 9(再无其它可变筮数)或至少包含 3 个以上的 6 或 9 时，所有的 9 所对应的阳爻则要变为阴爻，即将 9 变为 8.也许古人为了区别，在占筮记录时对某些要变的筮数 9，便特别注明“之八”、“皆八”之类.

我们据此来分析上面的 3 个筮例.

“贞屯䷂悔豫䷏，皆八也.”这里本卦有3个变爻：“初九”、“六四”、“九五”，因此，“初九”、“九五”两个阳爻都必须改变为阴爻，也就是说要“皆八也”.

“遇艮䷳之八，史曰：‘是谓艮䷳之随䷐’”.这里本卦有5个变爻：“初六”、“九三”、“六四”、“六五”、“上九”.所以“九三”和“上九”两个阳爻都要变成阴爻，因此记载强调“之八”.但仅仅知道两个筮数9都要“之八”，尚无法确定之卦，所以下文补充说：“是谓艮之随”.

最后一个“得泰䷊之八”，之卦是什么卦没有任何说明，如果按照本文的规则，本卦中至少有3个可变筮数，至少有一个9要变为8.具体变成了什么卦仅凭“遇泰之八”是无法确定的.按理应该像“遇艮之八”一样，加以注明“是谓艮之随.”这里未作任何补充说明，可能是记录者认为从上下文可以明显地看出之卦是什么卦，因而将其省略了.我们能否从上下文看出之卦是什么卦呢？记录这一筮例的《国语·晋语四》中的《秦伯纳重耳于晋》的原文是

> “十月，惠公卒.十二月，秦伯纳公子.…董因迎公于河，公问焉，曰：“吾其济乎？”对曰：“…今君当之，无不济矣.…臣筮之，得泰之八，是谓天地配，亨，小往大来，今及之矣，何不济之有？”

从晋文公与董因的对话看，文公怀疑：“吾其济乎？”董因则一再强调：“无不济矣.”“何不济之有？”很有可能泰卦变成了未济卦䷿.既济卦是“初吉终乱”，它的亦复亦变的未济卦则是“初乱终吉”.晋文公在骊姬之乱以后，多年流亡在外，现在出现了转机.“初乱”已经过去，“终吉”即将到来.虽尚处于“未济”，但成功在即.所以董因说：“何不济之有？”可能是董因在占筮时得泰卦变成了未济卦.所以，文公在怀疑“吾其济乎？”董因则一再解释“何

不济之有?"如果是"得泰之未济",则是一个 4 爻变的卦,它的 4 个变爻为"初六"、"九三"、"六四"、"上九". 其中的"九三"、"上九"都要由阳变阴,故曰"之八",但却把变成未济卦这一情节省略了,才造成这个千古之谜.

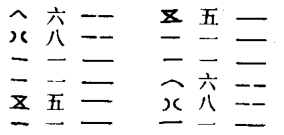
在"大衍之数解谜"一节中,我们论证了《系辞》筮法是广义筮法这种类型的筮法中最合理的一种,它保证阴阳爻以等概率出现,同时保证了每一卦中出现至少一个变爻的概率为 0.84. 但是《系辞》筮法没有说明如何保证在变卦时也保证"由阳变阴"和"由阴变阳"也以等概率出现. 用《左传》、《国语》中的筮例来验证,就发现了它的不足之处. 按照本文调整后的变卦规则就更为合理. 即使春秋时代人们未必是使用本文所说的规则,但从占筮的合理性来考虑,本文的结论大体上是可信的,至少作为筮法的改进是可取的.

最后,也必须指出:数学方法毕竟有其局限性,本文的不足之处主要是历史所能提供的样本数 16 太小,统计规律的可信度受到影响,很可能由于某些偶然因素导致概率推断的失误.

三、 奇字筮法浅议

(一)

自从甲骨文中陆续地发现了一些奇字以后,对这些奇字,学者们提出了种种看法. 郭沫若认为"不是人名,便是国族名."唐兰认为"是用数字当作字母组成的""丰镐地域的一个民族的文字."[①]1978 年,张政烺先生提出奇字就是数占法的记录.[②]1984 年,张政烺先生



① 郭沫若:古代文字之辩证发展,《考古学报》,1972 年第 1 期.

② 张政烺:试释周初青铜铭文中的易卦,《考古学报》,1980 年第 4 期.

再次肯定了“这些奇字是筮数，六个数目字一组的是重卦，而金文所见三个数目字一组的是单卦.①例如左边是甲骨文的奇字，中间是将奇字的符号翻译成相应的数字，右边是将奇数对应于阳爻，偶数对应于阴爻所成的卦.此说给易卦起源于筮数提出了有力的证据.因为它有实物作依据，因而较之易卦起源的其他假说有较大的影响，为越来越多的海内外易学家所接受.

但也有一些易学家对此说持谨慎的态度，认为“此说似乎尚有可商之处”.②因为

第一，按照张先生的说法，把奇数当作阳爻“—”，偶数当作阴爻“--”，3个数一组的便得8经卦中的某一卦，6个数一组的便得到64别卦中的某一卦.但是，奇字中还有4个字一组的，甚至在扶风齐家村西周遗址采集到的108号卜骨上的奇字，是由13个数字“五一八六八五五六八一一一一”组成的，这些奇字又代表什么卦呢？

第二，奇字中出现的数字符号，计有

奇字中的符号	—	𝌆	𝌇	+	𝌈	𝌉
所代表的数字	1	5	6	7	8	9

(1)

等6个.但是数占的方法，最古老也是最权威的记载始见于《系辞》，按《系辞》所载筮法，所得的筮数只有6，7，8，9等4个，断然不会出现1与5，这又作何解释？

根据上述两点，人们有理由相信，如果奇字确实是数占法的筮数记录，那么它所用的筮法必是与《系辞》筮法不同的方法.“三王不同龟，四夷各异卜”③，古人有与《系辞》筮法不同的筮法

① 张政烺：帛书“六十四卦”跋，《文物》，1984年第3期.

② 刘大钧：《周易概论》，p.336，齐鲁书社，1988年版.

③ 《史记·龟策列法》.

是完全可能的.那么,奇字所用筮法会是一种什么样的筮法呢?张先生提出了一个猜想,认为用的可能是"上牌"筮法.这种筮法的具体程序是:

取64根蓍策,任意分成4组,第一组搁置不用,称为"上牌".其余3组则称为上组、中组、下组,分别对应于一个经卦的上、中、下3爻.对每一组的策数分别揲之以8,余数是奇数的就对应阳爻,余数是偶数的就对应阴爻.完成这一道程序就得到一个经卦,重复演过一次,又得到另一经卦.把两个经卦按"后来居下"的办法重叠起来,就得到一个6爻卦.例如:

第一次:上牌 1

上组 $22=8\times2+6$ --

中组 $24=8\times2+8$ --震

下组 $17=8\times2+1$ —

第二次:上牌 7

上组 $11=8\times1+3$ —

中组 $20=8\times2+4$ --艮

下组 $26=8\times3+2$ --

把它们按"艮下震上"重叠起来,就得到小过卦䷽.

奇字所用的筮法是否就是"上牌"筮法呢?首先就碰到两个问题:

(一)揲之以8就有1,2,3,4,5,6,7,8等8个筮数,但奇字却不见2,3,4等3个应该出现的数字,反而出现了一个不应该出现的9字,这是什么原因?张政烺先生的解释是:"古汉字的数字,从一到四都是积横画为之,一二三𠀧自上而下书写起来容易彼此掺合,极难区分,因此把二、三、四从字面上去掉,归并到相邻的偶数或奇数之中.所以我们看到六字和一字出现偏多,而六字尤占绝对多数的现象."至于在筮数中为什么会出现不应该有

的9呢?张先生认为:"这里只是个民族的传统风俗习惯问题,东方人数以八为纪,所以创立筮法其数用八;西方人数以九为纪,所以把筮数扩充为九.一∧既已变成了阳爻、阴爻的符号,怎样称呼都可以,这只看主持筮法者的安排了.先有称呼一(阳爻)为九的事实,再作筮数一变为九的理论,所以总是似通不通的."①

(二)试对几组不同奇字中筮数出现的次数作一统计.

1.周初青铜器铭文(32卦168爻,其中有些是3爻卦,且有的残缺):

筮数	一	二	三	四	五	六	七	八	九
次数	36	0	0	0	11	64	33	24	0
频率	0.214	0.000	0.000	0.000	0.065	0.381	0.196	0.143	0.000

(2)

2.扶风县齐家村出土的西周甲骨(5卦30爻):

筮数	一	二	三	四	五	六	七	八	九
次数	11	0	0	0	3	8	0	6	2
频率	0.367	0.000	0.000	0.000	0.010	0.267	0.000	0.267	0.067

(3)

3.湖北江陵天星观战国楚墓竹简(16卦95爻,残缺1爻):

筮数	一	二	三	四	五	六	七	八	九
次数	37	0	0	0	0	49	0	5	4
频率	0.389	0.000	0.000	0.000	0.000	0.516	0.000	0.053	0.042

(4)

从统计表(2)、(3)、(4)看,各筮数出现的频率杂乱无章.当然,样本数168,30,95都不算大,难以反映出充分的规律性.但频率相差如此之大,作何解释?是否与"上牌"筮法相符?张政烺先生认为:"卜筮人所用各种方法却都是人为的规定,没有客观规律或逻辑的必然性.""不经传授,谁也无法推测出原定的规

① 张政烺:帛书"六十四卦跋",《文物》,1984年第3期.

则. 所以这里提出的筮法只是拟测的一种方案，借以增加对那些考古材料的理解，谈不上复原问题."

(二)

实际上数占法是一套严密的程序，都是有一定的规律的. 《系辞》筮法或"上牌"筮法都反映出一定的数学原理. 在数学原理的限制之下，各种筮法所得的筮数都会在取值范围、概率分布等等方面反映出规律性. 研究筮数的概率分布，再与现实的资料比较，有可能对奇字是否使用"上牌"筮法作出较为精确的判断.

对于"上牌"筮法，我们有下面的计算概率分布的公式(参看第七章例题 7.1.3).

将 64 分成 4 个正整数之和

$$64=R_0+R_1+R_2+R_3$$

其中任一个例如 R_1 用 8 除的余数为 $k(1\leqslant k\leqslant 8)$ 的概率为：

$$P(k)=\frac{C_{63-k}^2+C_{55-k}^2+C_{47-k}^2+C_{39-k}^2+C_{31-k}^2+C_{23-k}^2+C_{15-k}^2+C_{7-k}^2}{C_{63}^3} \tag{5}$$

根据这个公式，可以算出"上牌"筮法各筮数理论上的概率分布：

筮数 k	1	2	3	4	5	6	7	8
概率 $P(k)$	0.147	0.140	0.134	0.125	0.121	0.117	0.110	0.105

(6)

其中奇数与偶数出现的概率分别为

$$P(\text{奇})=P(1)+P(3)+P(5)+P(7)=0.512$$
$$P(\text{偶})=P(2)+P(4)+P(6)+P(8)=0.487 \tag{7}$$

再将其与统计表(8)比较，就会发现：

奇数出现频率 $=0.214+0.065+0.196=0.475$

偶数出现频率 $=0.381+0.143=0.524$

从(7)与(8)两表中可以看到，奇数或偶数的实际出现频率与理论概率有一定误差，但基本上还算接近；数字⚌与⚎的出现频率与理论概率则完全相符合；其它各个筮数出现频率与理论概率

奇字符号	—	∧	X	+	)(	ϒ
所表筮数	1,3	2,4,6	5	7	8	9
出现次数	36	64	11	33	24	0
出现频率	0.214	0.381	0.065	0.196	0.143	0.000
理论概率	0.271	0.382	0.121	0.110	0.105	0.000

(8)

之间均有大小不等的误差.这也许是样本数168太小,无法充分反映出规律性.试将(2)、(3)、(4)三个表中的奇字合在一起,对168+30+95=293爻再进行统计分析:

奇字符号	—	∧	X	+	)(	ϒ
所表筮数	1,3	2,4,6	5	7	8	9
出现次数	84	121	14	33	35	6
出现频率	0.287	0.413	0.048	0.113	0.119	0.020
理论概率	0.281	0.382	0.121	0.110	0.105	0.000

(9)

除 以外,其它各筮数的出现频率与理论概率均已相当接近,显示出实际数字与"上牌"筮法吻合的趋势.

但是,这里仍然存在两个问题:(1)筮数5的出现频率偏低;(2)出现了不应该出现的数字9.

据我的推测,这两个问题都可能与变爻有关.在前一段中我们指出了,无论使用何种方式占筮,它应该符合4条原理:

1.随机性原理;

2.等概率原理;

3.变爻原理;

4.最小数原理.

"上牌"筮法满足随机性原理是显而易见的;但它不满足等概率原理,不过相差不大,还勉强说得过去.至于变爻原理,"上牌"筮法并未指明有无变爻,这是最大的可疑之处.

按照张政烺先生的解释,为避免书写中"一二三≡"4个数

字的混淆，把 2,4 归入了偶数 6,3 归于奇数 1. 这就是说，筮人已经会把具体的整数抽象为奇数与偶数两类. 再把奇数与偶数转化为阴与阳的概念. 既然古人已有这样高度的抽象思维能力，为什么不像处理 2,3,4 一样，把 5,7,8 也作同样的处理呢？只要留下"⚋"和"⚊"，分别代表奇偶就足够了，这就很有可能 5,7,8 是变爻. 对于不变爻的数字 2,3,4，则可消去，取其奇偶性即可；对于变爻则不能消去，必须特别记下以备变化. 所以，本不应该保留的 5,7,8 便被保留下来了.

但是，如果 5,7,8 都是变爻，则出现变爻的概率为

$$P(5)+P(7)+P(8)=0.121+0.110+0.105=0.336$$

与《系辞》筮法变爻的概率 0.263 相比较，显得稍大一些，若只有两个数是变爻，例如 7,8 是变爻，则出现变爻的概率为

$$P(7)+P(8)=0.110+0.105=0.215$$

与《系辞》筮法相比，又显得小了一点. 古人可能采取了折中的办法，定 7,8 为变爻，而 5 则可变可不变，不作变爻时就保留 5，而作变爻时就归入 7，那么，表(8)或表(9)中 5 的频率偏小就好解释了，因为一部分 5 被记成了 7. 在表(8)中，我们有

5 的理论概率＋7 的理论概率＝0.231

5 的实际频率＋7 的实际频率＝0.251

两者已经比较接近.

为什么会出现本来不应该出现的筮数 9 呢？我认为《易纬乾凿度》卷上有一段话值得注意：

"易变而为一，一变而为七，七变而为九. 九者气变之究也，乃复变而为一. 一者形变之始."

恐怕这里说的也是变爻. "一"应该指的是奇数而不是第一个自然数的 1，所有的奇数都归于"一"，就是"易变而为一". 某些奇数(如 5 与 7)是变爻都记成了 7，故曰"一变而为七". 后来，人们

改用 9 来记变爻，于是又“七变而为九”. 在稍晚的资料表(3)中，已经没有 7，却出现了 9. 到更晚的战国竹简表(4)中，数字 5 与 7 都不存在了，只有 1，6，8，9 等 4 个数字，1 与 6 是不变的爻，8 与 9 是变爻，与《系辞》筮法颇为类似了.

至于为什么要“一变为七”，“七变为九”呢?这是运用了同余式的思想. 因为 1，17，9 用 8 除的余数都是 1，对于 17 继续揲之以 8，最后得到筮数 1，应记为 1；但要作为变爻，就直接记为 17，省去其十位数，便成为 7. 同样的道理，后来人们不用 17 而用 9. 因此，“一变为七”、“七变为九”用今天的数学符号表示，不过是下面的同余式而已：

$$1\equiv 17\equiv 9 \pmod 8 \tag{10}$$

换言之，“一变而为七”、“七变而为九”是概括了这样一个事实：这些数用 8 除的余数都是奇数. 当人们已经把奇数筮数抽象为阳爻的概念时，无论用哪一个数来记这一爻的筮数都无关紧要了. 这正如张政烺先生所指出的，“—”既已变成了阳爻的符号，怎样称呼都可以.

综上所述，如果奇字的确是数占法的记录的话，其所用筮法很可能就是“上牌”筮法. 由于这种筮法未能简单合理地安排变爻，才出现了一些筮数记录的混乱现象.

(三)

“上牌”筮法虽然简单易行，但它有严重的不足.

第一，阳爻、阴爻出现的概率不相等，不满足等概率原理；

第二，没有提出较为合理的办法处理变爻. 这样，后人就不能不对筮法进行改进，逐渐形成了最合理的《系辞》筮法. 这应该是较晚的事情了. 帛书《周易·系辞》中尚未载筮法①，可见到西

① 于豪亮：《帛书‘周易’》，《文物》，1984 年第 3 期.

汉初期尚未在南方推广此一筮法.

这里又涉及到易卦的起源问题,认为易卦起源于数占是令人难以置信的.数占需要一套严密的程序,而卦画则是非常简单而具体的.先有一套严密的程序,利用这套程序得到一些数;再把这些数抽象为奇偶的概念;再把奇偶的概念转化为阴阳的概念;再通过漫长的岁月,把阴阳的概念规范为两个符号"—"和"--"来表示.这不仅不符合人类从具体到抽象,从简单到复杂的认识规律,也不符合思维水平较低,特别是数学水平较低的古人的实际.

本章第一节详细地论证了易卦起源于古人思维决策的数学模型.古人在研究较复杂的系统时有时要作记录,在纸笔还没有问世的古代,记录是非常困难的."上古结绳记事,后世圣人易之以书契."从结绳记事到文字记事,中间有一个用符号记事的过程.古人研究多因素的决策系统,涉及的因素虽然千差万别,但每一种因素大致可以表现为两种对立的状态:对系统有利还是不利(或者说是吉还是凶).如果采用阳爻记有利因素,阴爻记不利因素,对于任何一个3因素系统,记录的结果必然是8经卦之一;对于6因素系统,则是一个易卦.因此,易卦最初是描述决策系统因素状态的符号模型.

在科学技术极不发达的古代,在研究一个决策系统时,有些因素在系统中究竟是有利还是不利,既不能在事前准确预测,又不能事后严加控制.对于这样的因素,古人无能为力,只好求助于占卜,借"鬼谋"以助"人谋".所以,易卦与占卜一开始就结下了不解之缘.后来人们发现,易卦的本身就是占卜的绝妙工具,于是易卦被当作龟甲一类的东西作为占卜的工具了.利用易卦占卜时,首先要得到一个卦.为了得到一个卦,逐渐形成了数占法的系统.所以,先有卦画而逐渐形成一套筮法,而不可能先有

筮法再符号化成为易卦.

这是本书对易卦起源的一种基本假说.现在,再根据这一观点对奇字作一些猜想.奇字表示的的确是卦.3个数字一组的是单卦,6个数字一组的是重卦.但是奇字中的数字不是数占法得来的数字记录,而是用数字表示吉与凶、有利与不利的符号.

前面说过,古人在研究决策系统时,用两种不同的符号来表示因素的两个对立面:有利或不利.有利或不利,固然是质的差异,但有利或不利的程度还有量的差别.《周易》的高明之处,就在于它的思维模式不是使用简单的二值逻辑,而是使用的模糊逻辑.判断一件事情,不是非吉即凶,非凶即吉,而是用大量的模糊判断来刻画吉与凶的程度.如"元吉"、"元亨"、"吉"、"亨"、"无咎"、"吝"、"有悔"、"厉"、"凶"等等.在记录决策系统的状态时,除了两个表示有利和不利的基本符号外,还需要一些进一步刻画有利或不利程度的补充符号.如数学教师在评卷时,对正确的答案记以符号"√",对错误的答案记以符号"×";但对答案大体正确,略有错误的则记作"√×"(这显然取象于"√"与"×"的结合);错误更多一点的则记作"×",等等.为了更详细的评价答案,有时会采用更详细一些的符号,如用5级记分来表示等.

因此,笔者有一个大胆的猜想:奇字中的数字"—"和"∧"是借数字以表示有利或不利的两个基本符号,"—"的形象是畅通无阻,平坦顺利;"　"的形象则是阻挠曲折,险恶居中.后来这两个符号逐渐演变成"—"和"--"("--"的形象是阻断不通,分裂无力).帛书《周易》用的还是"—"和"∧"这两个符号.而""、"+"、""和""则是刻画有利或不利程度的补充符号.

"+"可能表示通达中有梗阻,是有利中包含着若干不利一类的因素;

""则可能表示上下是两个有利的符号"—",中间包含一

个不利的符号“+”，这一因素是有利有弊，利多弊少.

“☒”是两个不利符号“∧”的合成，它意味着这一不利因素可以分解为两个较小的不利因素，易于各个击破，分别克服.

“䷾”则可看作是有利符号“—”在下，不利符号“☒”在上的合成，它意味着这一因素利与害搅作一团，纠缠不清. 不利作用在上，加以克服之后，最终会出现有利.

这些符号也是一种“象”.《系辞》曰：“圣人设卦观象系辞焉而明吉凶”，是否也可以从这种意义上去理解呢？

至于由 4 个数字或更多数字组成的奇字，当然更不可能是常见的数占法的记录，但用决策符号模型的假说则是很容易解释的：古人考虑决策系统虽然以 3 因素或 6 因素的为主，但客观事物是复杂的，并不排除有时要涉及 4 因素、5 因素或更多因素的决策系统. 那时，相应的符号模型就是 4 爻、5 爻或更多爻数的卦了.

§8.4 论象数易与科学易

象数之学是前人研究《周易》的主要方法. 从春秋战国时代起，中经汉、唐、宋、清直至当代，不少易学家都以象数为注释经文的工具. 象数学派认为：《易经》的卦爻辞是根据象数写下来的.《系辞》说：“易者，象也.”“圣人设卦观象系辞焉而明吉凶.”但是，易学研究的发展史证明，用象数来注释《易经》是颇为牵强附会的. 时至今日，这种陈旧的研究方法，早已显得苍白无力，处处捉襟见肘了. 近年来，在易学研究中又兴起了一种所谓“科学易”，许多学者试图把《周易》与某些现代科学的内容联系起来，如计算机科学、分子生物学、量子力学、人体科学等都曾被人引向易学的范畴. 更有人认为：近现代一些重大的自然科学的进展，都与《周易》的思想有密切的关系. 他们把新型电脑的软件和

硬件的改进，生物遗传密码研究的进展，特别是现代浑沌理论的产生，耗散结构的问世，都归结是受到了《周易》思想的启示．两千多年前的中国古籍真有如此神奇的作用吗？的确应该引起我们认真的思考．事实上，“科学易”与“象数易”在思想上有许多共同之处，所以，我们把它们放在一起来讨论．怎样认识象数之学的意义和作用？象数易与科学易有无联系？它们与《易经》的产生和内容有何关系？今天应该怎样来看待象数易与科学易这两种研究方法？这一节我们将对这些问题作初步的探讨．

一、 何谓象数之学

象数之学是前人用以注释《易经》的一整套形而上学的假定，分为象与数两部分．揲蓍而得数，因数而成卦，由卦而生象，观象而系辞．据黄宗羲《易学象数论》一书称：易象计有“八卦之象”、“六画之象”、“像形之象”、“爻位之象”、“反对之象”、“方位之象”、“互体之象”等 7 项．数则有筮数、天地数、图书数，等等．

概括言之，我们可以把易象分成三个主要的方面，即卦象、爻位和卦变三项．

1．卦象　所谓卦象，简单地说，就是前人认为易卦是某些事物的象征．卦象最初是以 8 经卦为基础的．前人认为 8 经卦象征宇宙间 8 种自然物，即所谓“八卦之象”：

乾为天，坤为地，震为雷，巽为风，

坎为水，离为火，艮为山，兑为泽．

“八卦之象”在春秋时代就使用了，如“蛊卦”的下卦（也称贞卦）是巽卦，上卦（也称悔卦）是艮卦，《左传·昭公元年》有：“在《周易》女惑男，风落山谓之蛊”．又《左传·僖公十五年》：“蛊之贞，风也；其悔，山也．”

到了成书于战国时期的《说卦传》进一步把 8 种自然物抽象为 8 种属性，天是健的，地是顺的，等等．从而把 8 经卦与 8 种抽

象的属性相对应了：

乾，健也；坤，顺也；震，动也；巽，入也；

坎，陷也；离，丽也；艮，止也；兑，说也.

反过来，《说卦传》又用8种抽象的属性去考察宇宙这个大系统中的每一子系统，从而又使8经卦与某些子系统的8种事物对应.例如，对动物这一子系统，人们认为，马有健的德性，牛有顺的德性，等等.于是《说卦传》说：

乾为马，坤为牛，震为龙，巽为鸡，

坎为豕，离为雉，艮为狗，兑为羊.

经过这样的反复扩张，《说卦传》就把"八卦之象"扩大为每一卦都象征一类事物，如："乾为天，为圜，为君，为玉，为金，为寒，为水，为大赤，为良马，为老马，为瘠马，为木果."

总之，卦象的实质就是将8经卦与某些既定的事物相对应，即认为8经卦是某些事物的象征，从而每一别卦就是两种事物的适当组合.象数学派就是根据这些象征的组合来注释《易经》的.如晋卦䷢的上卦离象征火，火是光明的；下卦坤象征地.因此，晋卦的组合象征就是"明出地上"，有如早晨旭日东升，所以卦名叫做晋.晋者，升也.

2.爻位　利用卦象来注释卦爻辞，始终难以自圆其说.于是，汉儒突破了限于以"八卦之象"为基础建立《易经》理论体系的思路.他们在"八卦之象"的基础上，新创"爻位说"，其内容有"爻位之象"和"六画之象".即认为《易经》在写卦爻辞时，除根据"八卦之象"外，还根据一个卦中阴阳爻的分布排列方式.

所谓"爻位之象"是把一个卦的6个爻分成6个等级，第一爻（初爻）为"元士"，第二爻为"大夫"，第三爻为"公"，第四爻为"诸侯"，第五爻为"天子"，第六爻（上爻）为"宗庙".

所谓"六画之象"，其主要点是：

将每个卦的6个爻分成3部分：上两爻为天，中两爻为人，下两爻为地.

将每个卦的6个爻分为阳位和阴位，奇数次的第一、第三、第五3个爻位为阳位，偶数次的第二、第四、第六3个爻位为阴位.若阳爻居阳位，阴爻居阴位，就是得位而吉；反之，就是失位而凶.

此外，还有所谓“承”、“乘”、“比”、“应”、“据”、“中”等一系列规定.阴爻居阳爻之上称为乘，阴爻居阳爻之下称为承，承则吉利，乘则凶险.相邻两爻有亲密关系，称为比.如果它们爻性相反，则易于得比.在一个卦中第一爻与第四爻、第二爻与第五爻、第三爻与第六爻是应的关系，即上、下卦处于同位次的爻是应的关系.相应的两爻爻性相同，称为敌应；爻性相反，称为顺应.顺应则吉，敌应则凶.在一个卦中，阳爻位于较高的爻位称为据.又在一个卦中，第二爻为下卦之中，第五爻为上卦之中，得中的爻一般吉利.

爻位说不见于《左传》所载的筮例中，系统地用爻位说注释《易经》始于汉儒.他们除使用“八卦之象”外，还使用“爻位之象”.例如“咸卦”九四爻辞中有“贞吉悔亡”之句，虞翻的注释是：“失位悔也，应初，动得正，故贞吉而悔亡矣.”意思是：“咸卦”的九四爻以阳爻而居阴位，这是失位，所以有悔恨；但九四爻阳爻能与初六阴爻顺应，这又是合于正道的，所以吉利，而原来的悔恨消失了.

3.卦变　狭义地说，“卦变”和“变卦”是有区别的.“变卦”是揲蓍成卦时改变变爻的爻性以得到新卦的方法.卦变是指从一个卦出发，适当调动、改变、重组某些爻而得到一些新卦的方法.卦变的方法很多，择其要者有：

(1)往来　所谓往来是指将一个卦的两个爻(爻性不同)互

换位置以得一新卦的方法.

(2)消息　所谓消息是指将一个卦中某些爻改变其爻性而得到新卦的方法.由阴变阳谓之"息",由阳变阴谓之"消".

(3)旁通　旁通是指将一个卦的所有爻都改变其爻性而得到一个新卦的方法.

(4)反对　将一个卦倒转过来而得到一个新卦,称为原卦的复卦,复卦的卦象称为原卦的反对之象.

(5)上下象易　将一个卦的上、下两个经卦互相调换位置得到一新卦,称为上下象易.

(6)互体　一个卦有6爻,不改变爻的次序可以组成4个经卦:(初二三)、(二三四)、(三四五)、(四五上).利用这4个经卦,不改变顺序可重叠成6个新的卦:〔(初二三)(二三四)〕;〔(初二三)(三四五)〕;〔(初二三)(四五上)〕;〔(二三四)(三四五)〕;〔(二三四)(四五上)〕;(三四五)(四五上)〕,除〔(初二三)(四五上)〕即原卦外,其余5个卦称为原卦的"互体之象".

前人用"八卦之象"与"爻位之象"注释经文卦爻辞,仍不能满足需要,于是又增加了卦变方法.一个卦可以由"卦变"变成许多新卦,可以有选择地引用新卦的卦象来解释卦爻辞.如《同人卦》九五爻辞中有"大师克相遇"这样的话.前人就认为,因同人卦䷌的旁通卦是师卦䷆,所以才出现了一个"师"字.又如《复卦》的卦辞有"复亨"二字,虞翻注释说:"刚反交初,故亨."其意谓复卦䷗可以看作是坤卦䷁初爻变为阳爻而得的,阳刚之气既已返回初爻,故亨通.

通过上面对象数易学的分析,不难看到,用象数之学那一套理论来注释《易经》,多为牵强附会之谈,虽不敢说这种方法已经山重水复,但至少很难再有新的突破了.

二、 象数之学的思想、文化背景

象数易学既然不是《易经》所固有的，那么产生象数易学的思想、文化背景是什么呢？我们可以从以下3个方面去分析.

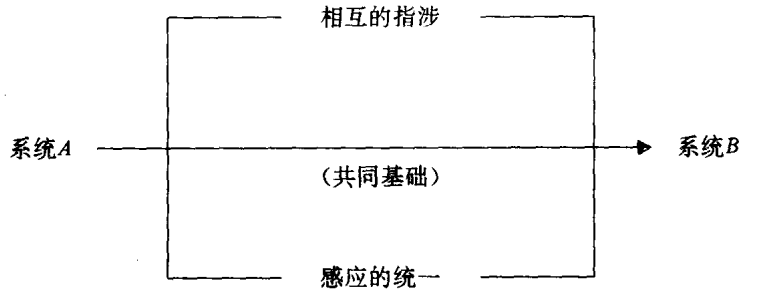
1. 由“天人合德”的文化心态产生的形而上学的信仰.

象数易学的最初起源，可能是来自对易卦的符号系统和揲蓍成卦的数的神秘信仰. 中国文化传统的一个最显著的特点是“天人合德”的宇宙本体哲学. 此种哲学在《易传》中已经有了明确的表现：“夫大人者，与天地合其德，与日月合其明，与四时合其序，与鬼神和其吉凶.”但可能在更早之前即已成为中国人文化心态的一种基础. 古人对符号与数所产生的神秘感，使他们认为那是能通神明之德的圣人所发现的某种宇宙法则的体现.《系辞》“古者包牺氏之王天下也，仰则观象于天，俯则观法于地，观鸟兽之文，与地之宜，近取诸身，远取诸物，于是始作八卦，以通神明之德，以类万物之情.”《说卦》也说：“昔者圣人之作《易》也，将以顺性命之理，是以立天之道，曰阴与阳；立地之道，曰柔与刚；立人之道，曰仁与义. 兼三才而两之，故《易》六画而成卦. 分阴与阳，迭用柔刚，故《易》六位而成章.”这反映古人对易卦成因的一种形而上学的信仰，这种形而上学的信仰后来成了象数之学的基础.

2. 由怀德海的“象征指涉理论”达到的两种思想系统的感应统一.

哲学家怀德海认为：吾人以两种不同的知觉模式理解事物. 一种是从事物的变化过程和事物变化过程的经验来知觉，称之为“因果效应模式的知觉.”一种是从事物的性质来知觉，称之为“直接呈现模式的知觉”. 怀德海的象征指涉理论认为，在“象征指涉”中，我们以“直接呈现的知觉模式”的知觉内容作为“因果效应的知觉模式”的知觉内容的象征，并统一两种知觉模式. 他

写道:“两种知觉模式之间的象征指涉,提供了支配象征意义的原理的主要例证.象征意义需要两种知觉内容,而且其中一种与另一种知觉内容有某种共同的‘基础’,借此建立这对知觉间的相互关系.”“所以当某一种知觉,唤起另一种知觉中相关的,融合的感情、情绪和导出行为时,两种知觉间的‘象征指涉’就存在了.那些融合的感情、情绪和导出的行为,分属于这对相关知觉,并且借着这种交互作用而增强.”①这段话表明:在“象征指涉”中,两种知觉要有某些共同的基础,两种知觉可以相互指涉,相互作用,形成统一的感应,互相阐释各有的意义.怀德海的“象征指涉理论”可以图示如下:



要知道,对于两个知觉系统,借着一些约定,通过人为的方式可以建立起共同的基础.易卦的符号系统,由于它的抽象性,最容易与别的事物建立联系而制造“共同的基础”,如将8经卦与8种自然物对应即其一例.因此,不管易卦原来是怎样产生的,它的阴爻与阳爻反映出两种对立的状态总是不变的.象数学家们发现,在宇宙、人生的系统中也有天地、阴阳、男女、尊卑、刚柔等

① 转引自成中英:《中国哲学的现代化与世界化》,pp. 121～123,和平出版社,1988年版.

等两种对立的状态，如《系辞》说："天尊地卑，乾坤定矣．卑高以陈，贵贱位矣．动静有常，刚柔断矣．方以类聚，物以群分，吉凶生矣．在天成象，在地成形，变化见矣．"因此，象数学派的研究者逐渐形成了易卦的象征系统，易卦的直接模式与它的象征系统达到感应统一，形成象数易学．

3．由数学的抽象性带来的广泛的适用性．

易卦的符号不是普通的符号，它具有非常严格的、完美的数学结构．数学具有高度的抽象性和广泛的适用性，"仁者见之谓之仁，智者见之谓之智．"人们一方面对它的"无所不包"感到神秘；另一方面又力图探索它的奥秘．在探索研究中逐渐形成了象数易学的体系．

三、 象数之学的数学背景

上面我们讨论了产生象数之学的思想文化背景，现在再来分析一下象数之学本身的逻辑结构．

象数之学实质上是一个庞大的公理体系．这个公理系统的最初出发点是最原始的"八卦之象"，即 8 经卦是象征 8 种自然物的最初假定．对于这些形而上学的假定，大抵是无验证性的，只要下一步的发展能言之成理，自圆其说，仍不失为一种成功的理论体系．

要做到这一点，这个公理系统就必须具有完备性与和谐性．很明显，"八卦之象"不具备完备性与和谐性．例如泰否两卦，否卦是乾上坤下，即天在地上，宇宙间的确是这种现象．但是泰卦却是坤上乾下，即地在天上，宇宙间并不存在这种现象．为了克服这种矛盾，象数学派不得不扩大其公理体系的范围．于是又引进补充假定：乾代表阳刚之气，坤代表阴柔之气，坤上乾下就不再是地在天上，而是阴柔之气与阳刚之气在上下交汇．为了能自圆其说，象数学派不断扩大其公理体系，卦象之不足，加之以爻

位；爻位之不足，再继之以卦变.

但是，象数之学作为一个公理体系，随着其完备性的增加，和谐性却在减少，互相矛盾的地方越来越多. 就拿爻位说中承、乘、比、应等那一套规定来说，就是互相矛盾的. 如坎卦☵的第二爻，以阳爻而居阴位，应该失位而凶；但它处于下卦之中，又应该得中而吉. 它与第五爻阳爻敌应，应该凶险；但又与上下两个阴爻得比，应该吉利. 又如既济卦䷾，它的 6 个爻都得位，每一对相应的爻都顺应，应该吉利；但它的每一个阴爻都乘于阳爻之上，又应该凶险. 而未济卦䷿ 6 个爻都失位，应该凶险；可它的每对相应的爻都顺应，每一个阴爻都承于阳爻之下，又应该吉利. 诸如此类，比比皆是，吉乎凶乎？何以自圆其说？

引进卦变的方法，既可以扩大其完备性，又可以避免矛盾性，足见古人思维方法的进步. 可惜的是，象数学派所引进的卦变方法，是毫无定准的. 因为在本书第四章中，我们给易卦集定义了一个乘法："同性相乘得阳，异性相乘得阴."在这个乘法之下，易卦集 A 是一个交换群. 按照象数学派的卦变方法，任何一个卦 a，变为另外一个卦 b，相当于用另外一个具有某种性质的卦 c 去乘 a 的结果：$ac=b$. 在一个群中，对它的任意两个元素 a、b，方程

$$ax=b$$

在群中有解. 这意味着，对任何一个卦 a，都可以通过汉儒的那一套卦变方法变为另外一个卦 b. 卦变虽能增加象数之学在注释卦爻辞时的灵活性，但因它缺乏定准，因而是一种毫无意义的规则.

通过对象数之学的数学分析，我们发现，象数之学是一个既缺乏完备性，又充满矛盾性与不确定性的公理系统. 这就注定了它不能形成完整的体系，难以自圆其说.

四、 象数之学的实用背景

在本章第一节中我们论证了易卦是古人思维决策的数学模型.但是任何抽象的思维模型,总要用之于实际才有真正的生命力.通过具体的事物来探求事理,称为取象;通过理论的研究来说明事理,叫做谈玄.偏重于实用的中国古代的学术思想,更多的注重于取象.因此,抽象的思维模式总植根于具体的事物形象,终于导致产生象数之学.

尽管我们在上文中对前人利用"卦变"来解释经文的做法持否定的态度.但对"卦变"方法的本身,仍然不能轻易地否定.《系辞》云:"易之为书也不可远,为道也屡迁,变动不居,周流六虚,上下无常,刚柔相易,不可为典要,唯变所适.""上下无常、刚柔相易"正是对以"往来"、"消息"等为基础的"卦变"问题的高度概括.易卦作为一个6因素决策系统的数学模型,在实际运用时,各个因素的作用往往因时、因地而不同,在中途还可能发生突变.也有的因素,在事前无法预测,在事中难于控制.所有这些因素对决策系统究竟有利还是不利就难于决断.换句话说,在决策模型中这些爻应取阳爻还是阴爻难于确定.例如对泰卦䷊说,决策者可按照前三爻有利,后三爻不利的情况采取对策;但如果第四爻究竟是否阴爻尚未完全确定,决策者理所当然地要考虑该因素的另一种可能情况.如果第四爻是阳爻,那时决策系统的形势就会改观,模型也由泰卦䷊变成大壮卦䷡了.决策者必须有两手准备,参照两个卦的思维模型来确定应该采取的对策,才能做到万无一失.因此,考虑一个卦的各种可能变化,分析与之相应的各种思维模型,提出多种可行的决策方案或应变方案,正是易卦的思维模型的妙用.这种运用反映在卦爻的变化上,正是"象数之学"中的主要内容——"卦变".

因此,"象数之学"的产生,不仅有它的思想、文化背景,也有

其实用背景.

(五)科学易和象数易

从怀德海的"象征指涉理论"看,对于一类经验或一组知觉符号的形式,从组成指涉的共同基础出发,可以发展出一个或更多的思想系统.从易卦的符号系统出发,可以发展出多种多样的易学系统.中国古代哲学家从易卦模型的阴阳交错、爻位高低之中得到了哲理的启示.当代的科学家们也有可能从易卦的数学结构中得到科学的启示.特别地,本书的第二至第七章论证了易卦集是一个布尔代数、是一个群、是古典概率空间,等等.这些都是现代科学技术中常用的数学模型.这就使易卦的符号系统与某些现代科技思想系统的相互指涉,有了坚实而广泛的基础.更由于数学高度的抽象性和广泛的适用性,很容易通过一些简单的对应关系,在易卦的符号系统与科学系统之间建立某种人为的联系,从而作为产生相互指涉的共同基础.

下面我们以集合的笛卡儿积为例来解释这个问题.一般地说,若 m,n 是正整数,且 $m\cdot n=6$,如果某种事物可以用 m 个要素来描述,而每一要素恰好有 2^n 种不同的状态,则这种事物就可以与易卦建立一种人为的、产生"象征指涉"的共同基础.

电子计算机是 $n=1$ 的一个典型例子.

现代数字通讯系统和计算机中信号都采用二进制,即用一个由 1 与 0 组成的符号串来表示传输的信息.从电子数字计算机的设计和制造来看,二进制具有很大的优越性.因为它只有 1 和 0 两个数字,表示它们的物理方法最简单.例如,可以直接利用电子元件具有开和关这两种状态的自然特性.即可以约定一种状态(例如关)表示 0,而另一种状态(开)就表示 1.这样,要输入的信息编制成程序后,就可将原始数据和程序通过输入设备(如光电输入机)转换成一连串的电脉冲信号(有脉冲表示 1,无

脉冲表示 0)，输入储存器保存起来.

如果将易卦的阳爻“—”与 1 对应，阴爻“--”与 0 对应，就在电子计算机的软件系统与易卦的符号系统之间建立了联系，从而产生了“象征指涉”的共同基础.

生物遗传密码是 $n=2$ 的一个典型例子.

遗传物质都是由核酸构成的. 核酸有两种，一种叫脱氧核糖核酸(DNA)，一种叫核糖核酸(RNA). DNA 与 RNA 的结构很相似，都是由 4 种核苷酸连接起来的很长很长的大分子. DNA 的作用有两个方面. 一方面自我复制，在生物的传种接代中传递遗传信息；另一方面，通过 RNA 的媒介使遗传信息以一定的方式反映到蛋白质的分子结构上，从而使后代表现出与亲代相似的性状. 由于组成 RNA 的核苷酸共有 4 种，即腺嘌呤(A)，鸟嘌呤(G)，尿嘧啶(U)和胸嘧啶(C). 而蛋白质分子却有 20 种氨基酸. 因此，RNA 的核苷酸与蛋白质的氨基酸就不可能是简单的一对一或二对一的关系，需要由 RNA 中 3 个以一定的顺序相联的核苷酸来决定一个氨基酸，称为“三联体密码”. 如 AAA(赖氨酸)、UCA(丝氨酸)等. 因核苷酸恰有 4 种，可能组成的“三联体密码”共有 $4^3=64$ 种，这正是 $n=2, m=3$ 的情形. 如果我们将四象之集{⚌, ⚍, ⚎, ⚏}与核苷酸之集{U, C, A, G}相对应：

$$U\longleftrightarrow ⚌,\ C\longleftrightarrow ⚍,\ A\longleftrightarrow ⚎,\ G\longleftrightarrow ⚏$$

这意味着，遗传密码系统与易卦的符号系统之间建立了“相互象征指涉”的共同基础. 于是有人认为《周易》是“以万物的最一般法则来预见遗传密码的必然组成及其数目和顺序”①，“现代分子生物学之 DNA 与 RNA，其分子结构之变化与化学键之象数，

① 徐宏达：《周易》所预示的遗传密码，《周易研究》，1989 年第 2 期.

不期与此相似."①

总之,当前某些学者所宣扬的《周易》中的科学预见,大多数的实质是利用易卦的数学结构适用的广泛性,人为地建立了易卦的符号系统与某些现代科学系统之间的一些"共同的基础",从而使两种系统之间发生相互的指涉,而达到某种程度的感应统一而已.从某种意义上讲,当今的所谓"科学易学"正是一种新的象数易学.

(五)象数之学对现代科学的启示

《周易》本身与现代科学技术并没有实质上的联系,但是《周易》的重要组成部分易卦,作为一种符号系统,却可与现代科学技术发生联系.这正是当今"科学易学"赖以立足的基础.象数易学则是在研究这个符号系统的基础上发生、发展起来的.特别要指出的是,象数之学与数学思维方法的发展有许多共同之处,这些思维方法对现代科学研究还是有一定的意义的.

第一是抽象化.高度的抽象化是数学思维的一大特色.人们历来都认为中国古代文化传统的一个特点是缺少抽象思维,这一论点对于象数之学显然不能成立.古人把宇宙人生的各种矛盾对立抽象为阴阳的概念."一阴一阳之谓道",这一高度的抽象概括虽然是哲学的抽象,但对科学研究的指导意义也是不言而喻的,对后人分析事物、认识客观世界是很有帮助的.卦象说研究"八卦"与8种自然物的对应.反复地运用了从具体到抽象,从抽象到具体;从特殊到一般,从一般到特殊的思维方式.象数之学的抽象方法,不在于这种抽象本身产生了什么具体的科学内容,而在于对科学研究的方法论上的意义.

① 潘雨庭:科学易,《周易纵横录》,pp.423～436,湖北人民出版社,1986年版.

第二是模型化. 建立研究对象的数学模型，不仅是数学思维的重要方法，也是现代科学研究的重要方法，易卦可以说是人类在研究复杂系统中建立最早的数学模型. 象数学派力图把宇宙人生的无穷变化，通过易卦模型的阴阳交错、爻位高低，往来消息等的变化以及各种易数的对应来描述. 特别地，我们证明了易卦本身的符号系统具有完美的数学结构. 例如，适当的处理后，它可以是布尔代数、群、概率空间，等等. 这些都是现代科学技术中最常用的数学模型. 古人虽然不可能掌握这些现代数学的概念，但是却不自觉而又实实在在地构造出了这样的数学模型.

第三是公理化. 爱因斯坦有一句名言："西方科学的发展是以两个伟大的成就为基础的，那就是：希腊哲学家发明的形式逻辑体系（在欧几里得几何中），以及通过系统的实验发现有可能找出因果关系（在文艺复兴时期）. 在我看来，中国的贤哲没有走上这两步，那是用不着惊奇的. 令人惊奇的倒是这些在中国全部做出来了."①欧几里得的公理化体系是建立学科体系的光辉典范，而象数之学的那一套正是公理化思想的萌芽，象数之学力图从"卦象"、"爻位"等一些形而上学的假定出发，通过逻辑推理的方法建立起易学的体系. 中国的贤哲虽然没有走上成功地运用公理化的道路，但实际上已经做了许多. 公理化方法已成为当代科学建立理论体系最常用的方法了.

第四是模糊化. 人们的思维比较习惯于二值逻辑，但二值逻辑在研究复杂系统时有明显的不足之处. 在《周易》中，虽然易卦反映的也是二值逻辑系统，"八卦定吉凶，吉凶生大业."但《周易》并不完全使用二值逻辑，并不总认为"非吉即凶，非凶即吉."而使用了类似于现代模糊数学处理模糊概念的方法. 在吉与凶

① 《爱因斯坦文集》，第一卷，商务印书馆，1977 年版.

之间使用了“元吉”、“大吉”、“吉”、“利”、“亨”、“无咎”、“悔”、“吝”、“厉”、“凶”等表示吉凶程度的概念，类似于模糊集合的隶属度.象数之学给人们开创了模糊化这种思维方式的思路.前面我们谈到，一个易卦是一个6维布尔向量，它的阳爻和阴爻分别代表系统的有利因素和不利因素.如果考虑到模糊化，就成为模糊向量了.

从以上各章中我们看到，《周易》与现代数学的联系，主要表现在两个方面：一是易卦集本身是一个优美的代数结构.易卦集是一个格，①一个布尔代数，一个交换群.无论是格论、布尔代数、群论今天都已发展成为一个重要的数学分支.因此，易卦集就具有极为丰富的数学内容.另一个是与揲蓍成卦有关的一些数学内容，它与整数论中同余，分析和某些古典型概率的计算有关，其中需要一定的数学技巧.运用这些数学知识，在对某些易学课题乃至整个易学的研究中，是大有用武之地的.

① 一个集合 A，在其中定义了两个二元运算：加法“+”和乘法“×”，如果这两个运算都满足交换律、结合律和吸收律.即对 A 中任意的元素 a、b、c，都有

(1) $a+b=b+a, a\times b=b\times a$;

(2) $a+(b+c)=(a+b)+c, a\times(b\times c)=(a\times b)\times c$;

(3) $a+(a\times b)=a, a\times(a+b)=a$.

则称此代数系统 $(A,+,\times)$ 为一个格.

如果一个格的运算还满足分配律，并且具有零元和单位元，每一个元都有补元，则 A 就是一个布尔代数.

参考文献

[1]《十三经注疏》(阮刻本),中华书局 1980 年影印版.
[2]《易学精华》,齐鲁书社 1990 年影印版.
[3]来知德:《易经来注图解》,巴蜀书社,1989 年版.
[4]胡渭(清):《易图明辨》,巴蜀书社,1991 年版.
[5]宋书升(清):《周易要义》,齐鲁书社,1988 年版.
[6]尚秉和:《周易尚氏学》,中华书局,1980 年版.
[7]李镜池:《周易探原》,中华书局,1991 年版.
[8]高亨:《周易古经今注》,中华书局,1989 年版.
[9]高亨:《周易大传今注》,齐鲁书社,1988 年版.
[10]金景芳:《周易讲座》,吉林大学出版社,1990 年版.
[11]吕绍纲:《周易阐微》,吉林大学出版社,1990 年版.
[12]刘大钧:《周易概论》,齐鲁书社,1988 年版.
[13]宋祚胤:《周易译注与考辨》,湖南人民出版社,1987 年版.
[14]邓球柏:《帛书周易校释》,湖南人民出版社,1987 年版.
[15]徐志锐:《周易大传新注》,齐鲁书社,1989 年版.
[16]欧阳维诚:《周易新解》,岳麓书社,1990 年版.
[17]廖名春、康学伟、梁韦弦:《周易研究史》,湖南出版社,1991 年版.
[18]孙振声:《白话易经》,晨光出版社,1984 年版.
[19]唐明邦等:《周易纵横录》,湖北人民出版社,1986 年版.
[20]顾明:《周易象数图说》,中国社会科学出版社.
[21]李树菁、段长山、徐道一主编:《周易与现代自然科学》,中国社会科学出版社,1990 年版.
[22]张国梁:《周易原理与古代科技》,鹭江出版社,1990 年版.
[23]黎凯旋:《易数浅说》,易学出版社,1991 年版.
[24]《船山全书》第一册,岳麓书社,1988 年版.
[25]张岱年:《文化与哲学》,教育科学出版社,1988 年版.

[26]成中英(美):《中国文化的现代化与世界化》,和平出版社,1988年版.
[27]李约瑟(英):《中国科学技术史》,科学出版社,1978年版.
[28]克莱因(美):《古今数学思想》,上海科技出版社,1981年版.
[29]刘子华:《八卦宇宙论与现代天文》,四川科学技术出版社,1989年版.
[30]吴文俊主编:《秦九韶与数书九章》,北京师范大学出版社,1987年版.
[31]吴学谋:《泛系理论与数学方法》,江苏教育出版社,1990年版.
[32]邓宗琦主编:《数学家辞典》,湖北教育出版社,1990年版.
[33]蔡海涛、欧阳维诚、刘裔宏:《现代社会科学的数学方法》,1989年版.
[34]陈景润:《组合数学》,河南教育出版社,1985年版.
[35]COHEN(美)著、林和诚译:《组合论基本方法》,湖南教育出版社,1987年版.
[36]李修睦:《图论导引》,华中工学院出版社,1982年版.
[37]载世虎:《布尔代数》,湖南教育出版社,1981年版.
[38]谢邦杰:《抽象代数学》,上海科学技术出版社,1982年版.
[39]龚光鲁:《有限数学引论》,上海科学技术出版社,1982年版.
[40]王铭文:《概率论与数理统计》,辽宁人民出版社,1983年版.